ELEMENTI

DI

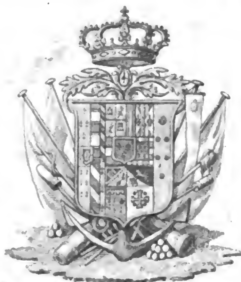
FISICA MATEMATICA

TOMO PRIMO.

Estrat ALE OFFIC de' 19. *Luglio* 1793.

Art. IV. „ ter i di paga-
„ re al e al prez-
„ zo di

Gli *ati dalla*
mia firma





ELEMENTI

DI

FISICA MATEMATICA

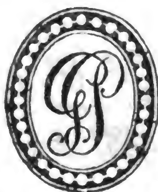
COMPILATI DA

STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO

DELLE SCUOLE PIE

TOMO I.

Edizione Terza accresciuta e corretta.







FIRENZE 1809.

Presso Pietro Allegrini Stamp. alla Croce Rossa

A Spese di Giovacchino Pagani.

Xenocrates ad eum qui Rerum Mathematicarum ignarus ludum suum frequentare cupiebat, Abi, *inquit*, ansis enim et adminiculis Philosophiae cares.

Diog. Laert. in Xen. L. IV. 10.

DISCORSO PRELIMINARE

Con questi Elementi di Fisica Matematica (tenue lavoro in un secolo si fecondo di Matematica, di Fisica e d' Elementi) restò finalmente adempiuto fino dall' anno 1788 l' impegno da noi già contratto nel 1781, e vennero abbondantemente applicate alla Pratica l'eccellenti Lezioni Elementari dell' Ab. Marie. Alcune delle cagioni che ne produssero allora il ritardo, e che fecero forse stupire il Pubblico dell' intervallo alquanto lungo tra la promessa e l' esecuzione, meritano anche in questa ristampa d' esser partecipate alli Studiosi.

Sotto il nome di pratiche Applicazioni di Matematica si era intesa fin quì da tutti gli Scrittori Elementari o la dottrina e gli usi dello Stuccio Geometrico, o una raccolta di Problemi or Meccanici, ora Idraulici, ora Ottici ed ora Astronomici, la cui soluzione dipendesse in qualche modo dai varj risultati o della Geometrìa o dell' Analisi. Dobbiamo confessare che l' altrui esempio ci avea sedotti in principio: tutte le nostre idee si rivolsero alla Squadra, al Compasso di proporzione, al Semicircolo, alla Scala e a quanto può esservi di più utile e di più elegante nell' Agrimensura, nella Stereometrìa, nella Livellazione, nella Gnomonica e in tutto il vasto campo della Fisica Matematica. Ma quanto disordine in questo disegno! L' impossibilità di dare ai Principianti le giuste nozioni or di questa Scienza or di quella, il salto irregolare dall' una all' altra secondo la varia indole dei teoremi, e soprattutto la necessità di richiamare spessissimo i fondamenti o dell' Astronomìa o dell' Ottica o della Meccanica senza poterne dimostrar sul fatto uno solo, ci fecero infine avvertire che in luogo d' una fabbrica solida e vantaggiosa, andavasi

ad inalzare una mole informe di sparsi avanzi e di rottami, più sconnessa ancora e più mancante d'un volgar Dizionario, e capace piuttosto di abituare i Giovani all'idee superficiali e all'impostura, che di ispirar loro una virtuosa passione per la profonda e verace dottrina.

Abbandonammo pertanto l'inutil fatica, e dopo qualche incertezza risolvemmo di scrivere un Corso regolato di Fisica: ma se nel formare il piano d'un Corso qualunquè si è mai dovuta mettere a calcolo la scelta delle materie, in un Corso di Fisica non si potrebbe certamente dispensarsene senza follìa. La Fisica, quest'albero immenso che stendendo i suoi rami dall'uno all'altro limite dell'Universo, vegeta giornalmente in proporzione della sua sterminata grandezza, e con la varietà prodigiosa dei fiori, delle frondi e dei frutti, chiaramente palesa la forza insieme e la debolezza dello spirito umano che lo alimenta, la Fisica non lascia chiudersi in quattro pagine, e chiunque intraprende senza scelta a trattarla, si espone al rischio di pubblicar molti Volumi e pochissime cognizioni. Dato dunque per una parte l'infinito numero degli oggetti che la Fisica abbraccia, e supposto per l'altra il corto giro di alcuni mesi che nelle Pubbliche Scuole suol destinarsi a questo Studio, si sentirà ben presto l'impossibilità di parlar degnamente dell'intera Scienza, e l'evidente bisogno di sacrificare alla sua più nobil porzione il vasto ammasso di ciò che resta.

Ma la sua più nobil porzione qual'è? son forse quelle metafisiche sottigliezze che per dar di tutto ragione stabiliscono dei principj che la sana ragione non può comprendere, o sono quelle ipotesi capricciose che a somiglianza di certi insetti, nascono e muojono nel giorno stesso? Pensi ognuno a suo gusto: ma noi crediamo che il privato gusto d'un Maestro debba cedere all'interesse pubblico degli Scolari, e che il loro interesse consista non in applicarsi a dei vani trastulli d'ingegno e di fantasìa, cui debban rinunziar quanto prima con pentimento e vergogna, ma in farsi un ricco fondo di cognizioni che il buon senso trovi sempre bastantemente esatte, e che la moda non pos-

sa mai tacciar di ridicole e d' antiquate. Perciò la porzione più nobile della Fisica è per noi quella sola che portando impresso più chiaramente dell' altre il prezioso carattere di verità, men dell' altre è soggetta all' eterna vertigine dell' opinioni.

Or tale fu riconosciuta in tutti i tempi la Fisica Istorica e la Fisica Matematica: poichè laddove o caddero nell' oblìo o sono interamente perite le sottili speculazioni e le poetiche stravaganze di tanti Filosofi che pur non mancarono d' ammiratori e di seguaci; si tengono all' incontro in alto pregio e si consultan tuttora avidamente le Storie Naturali d' Aristotele, di Teofrasto e di Plinio, nè cessano di comparirci stupende le Scoperte meccaniche d' Archimede, l' Invenzioni idrauliche di Ctesibio, le Misure astronomiche e geografiche d' Eratostene, e l' ottiche Osservazioni di Tolomeo. Non già che in queste parti ancora non possa talvolta insinuarsi l' errore, e quindi aprirsi l' adito al cangiamento: ma prescindendo da poche accidentalità di circostanze e di fatti, è ben raro il caso in cui dimandino un' essenzial riforma le teorìe, e in questo caso medesimo gli Storici e i Matematici son tanto avvezzi allo schietto linguaggio della natura e all' inviolabil rettitudine del raziocinio, che lungi dal dissimulare il difetto o sostituir con franchezza le lor chimere all' altrui, accennano con buona fede l' incertezza dei risultati ed aspettano in silenzio un miglior lume dall' imparzialità dell' osservazioni e dall' oracolo dell' esperienze.

Potrebbe opporsi per avventura che la Fisica Istorica è troppo vasta, e la Fisica Matematica è troppo laboriosa e sublime: ma ecco appunto il motivo per cui tralasciata la prima, ci determinammo infine alla seconda. Invano grideranno molti al paradosso: è la via difficile che ha bisogno di guida; e il condurre i Giovani con aria d' importanza per sentieri facili e deliziosi, è un fomentarne l' ordinaria lentezza, un estinguerne il genio e il talento, un affrettare il naufragio de' buoni Studj e dell' Arti tutte che ne dipendono. Infatti vi è forse uno solo di questi Giovani che dal piacevol commercio coi Vegetabili e coi

Minerali, o dagli ameni esperimenti sulle Chimiche trasformazioni e sull' Arie, passi senza un estremo ribrezzo ai grandi ed immutabili fondamenti dell' umano sapere, e non perda affatto il coraggio alla vista di quelle Carte, ove si conservano le dottrine immortali di Newton e d' Eulero? ma per l' opposto non ve ne è uno solo che dopo qualche assuefazione alle ruvidezze pretese della Fisica Matematica, non possa, se pur gli piace, abbassarsi fino all' Istorica, impadronirsene da se medesimo in pochi istanti, e portarvi anche una nuova serie d' idee e un nuovo spirito di combinazione, soliti doni del calcolo e dell' analisi. Del resto, chiunque ci verrà dire che i Giovani sono per la maggior parte incapaci di studj così profondi, mostrerà di aver meditato ben poco sulle forze mirabili dello spirito e della macchina giovanile. Noi sapremmo farne la più completa e la più trionfante apologìa, e sarebbe forse di pubblica utilità lo svelare ad uno ad uno i veri motivi dell' esito sfortunato che molti narrano dei loro studj: ma senza perderci in digressioni, risponderemo per ora con l' esperienza non interrotta di ventun Corso, che i Giovani assolutamente incapaci giungono appena ai sei per cento.

La Fisica Matematica divenne dunque il nostro solo pensiero. Ma come adunar tanta messe in un piccol Volume? poichè tutti sanno che se questo ramo della Naturale Scienza fu debole e fiacco ne' suoi principj, e mancando talora o di nutrimento adattato o di proporzionata cultura, minacciò perfino d' inaridirsi; vennero poi dei giorni sì belli per lui, che sviluppata in un subito la sua segreta energìa, eguagliò tutti gli altri in ampiezza, e gli superò di gran lunga nella solidità del tronco e nell' abbondanza dei frutti. Era perciò manifesta la necessità di distinguer la nostra Fisica in Elementare ed in Sublime, di riserbar quest' ultima a circostanze migliori, e di applicarci intanto alla chiara e metodica esposizion della prima. Fatto il disegno, si trattò d' eseguirlo: e come veggiamo due Artefici non solo travagliar diversamente ai varj pezzi d' una macchina, ma spesso anche

riunirsi

riunirsi insieme per dar forma e perfezione a un pezzo stesso: così le differenti Parti dell'Opera crebbero tra le nostre mani con vicendevol consenso, di modo che la totalità del lavoro non è dovuta all' uno più che all'altro di noi.

Frattanto le Lezioni Elementari dell' Ab. MARIE, bastantemente perfette riguardo al piano del loro celebre Autore, si trovarono in parte mancanti relativamente all'intenzione di farne la base di tutto il nostro edifizio. Convenne pensare a qualche aggiunta; ond'è che ripreso l'intero filo delle materie, c'impegnammo appoco appoco ad esaminarle minutamente, a toglierne il superfluo, a sostituirvi il necessario, a rischiararne l'oscuro e ad addolcirne il difficile. Si sciolse una quantità considerabile di problemi che nudamente proposti nelle Lezioni, servissero d'esercizio agli Studiosi, e ci autorizzassero a richiamarne in Fisica i risultati: si dette una nuova forma alle ordinarie regole de' due Calcoli Differenziale ed Integrale, onde i Giovani potessero apprenderle fin dal prim' anno, e maneggiarle poi nel secondo all'ingresso medesimo del nostro Libro: si calcolarono alcune Tavole interessanti da porsi di seguito alle Lezioni, e si rese in tal guisa più facile e più spedito il passaggio da varie formule generali ai particolari casi e bisogni dell' Analisi e della Fisica: insomma riusciron sì numerosi i cangiamenti e l'aggiunte, che impiegato il giusto tempo a ridur tutto in sistema, sol nell' Aprile del 1786 potemmo intraprendere la seconda Edizione delle Lezioni Elementari, i cui numeri preceduti dalla lettera L. (*Lezioni*) furono perpetuamente citati nella prima Edizione di questi nostri Elementi.

E questi ancora dovean pubblicarsi unitamente alle Lezioni, se un avvenimento inaspettato, la cui memoria sveglierà sempre in noi la gratitudine ed il dolore, non ci avesse obbligati ad un nuovo ritardo. Erano appena impresse le prime pagine delle Lezioni, quando le Scienze Matematiche dopo aver perduti in poco tempo un Eulero,

un d'Alembert ed un Frisi, fecero la perdita non men deplorabile dell'Ab. Leonardo Ximenes. Questo nome è sì noto all'Europa, e sono sì divulgate le tante Opere ond'Egli accrebbe i tesori della Meccanica, dell'Idraulica e dell'Astronomìa, che il volerne quì compendiare i meriti e la dottrina, sarebbe piuttosto un oscurar la sua fama: basti dunque al nostro intento il soggiungere, che non ebbe Egli il cuore men generoso e men sensibile dello spirito; che riguardando la Toscana come sua Patria, e grato alle pubbliche distinzioni e alle Regie Beneficenze onde il lungo studio e la pratica consumata lo aveano fatto degno, consacrò morendo alla pubblica utilità le ricompense de' suoi sudori, ed istituì due Cattedre, l'una d'Astronomìa e l'altra d'Idraulica, Scienze coltivate da Lui col più brillante successo; e che infine scelse noi i primi ad occupar quelle Cattedre, quasi presentisse i deboli ma sinceri ufizi che gli avremmo resi un giorno ne' suoi ultimi istanti, e volesse mostrarcene anticipato il gradimento con una sì pubblica e sì onorevole testimonianza.

Se questa destinazione impensata ad allevar degli Idraulici e degli Astronomi non ci trovò del tutto sprovvisti, ci costrinse almeno a gettare un'altra volta l'occhio sugli Elementi di Fisica: e per dar loro una forma più corrispondente alle nostre nuove incumbenze, stabilimmo di aumentare alquanto l'Astronomìa, e di serrar per l'opposto in confini assai più stretti l'Idraulica; l'uno e l'altro a ragione. Finchè si tratta d'istruir dei Giovani col solo fine di accostumargli alle discussioni profonde e al severo raziocinio delle Matematiche; niuno può giustamente dolersi se si trascuri qualche minuta ricerca, o si abbracci qualche teorìa non canonizzata per anche dall'esperienza e dall'uso: benchè dobbiamo quì rendere un pubblico omaggio alle vaste cognizioni e alla lunga esperienza del celebre Astronomo il Sig. Barone di Zach, che con un impegno poco comune e con una cortesìa veramente straordinaria, ci ha somministrati dei lumi pur troppo nuovi per la completa istruzione dei nostri Giovani Astronomi. Ma quando gl'insegnamenti son principalmente diretti a formar dei Periti che il Pubblico possa all'occorrenze impiegar con

fiducia e con vantaggio, non è più lecito ai Professori o di sopprimer le cose più necessarie o di far pompa di insolite e dubbie ipotesi. Perciò si dette un giro più ampio all'Astronomìa e la corredammo abbondantemente di formule, di dettagli, d'applicazioni e d'avvertenze ovunque lo credemmo opportuno. Quanto poi all'Idraulica, ella interessa sì da vicino la salute o i comodi della Società, e potrebbero costar sì cari al Cittadino i tentativi arditi d'un'equivoca teorìa, che è molto meglio passare in silenzio tutti i sistemi ingegnosi, onde si lusingò taluno di aver fissate una volta l'ignote leggi dell'acque correnti. L'antiche regole quantunque incerte, con la lunga prescrizione e col suffragio unanime di tante età, salveranno in ogni evento un Perito che le abbia prudentemente applicate: ma le dottrine che senza vantare una maggior certezza, hanno di più la pericolosa impronta della novità, non potranno mai difenderlo dalla taccia di temerario, e in caso di sinistra riuscita, il promotore dei perniciosi precetti non sarà men detestato di colui che gli eseguì. Una riflessione di tanto peso non ci permise di bilanciare, e sacrificammo tutto intero alla pubblica sicurezza un interessante compendio della nuova Idraulica di Buat. Così l'Edizione dei nostri Elementi non ebbe principio che nel Giugno del 1787. Nella presente, che l'uso della prima e seconda per un intero ventennio ha resa più corretta e più completa, si troverà citata con la lettera L. non più la seconda, ma la *quinta* Edizione delle Lezioni Elementari dell'Ab. Marie.

Comprendono questi Elementi la Meccanica, l'Idromeccanica, l'Ottica e l'Astronomìa. Bisogna convenire che l'Antichità, così scarsa nei primi tre generi, abbondò stupendamente nell'ultimo; poichè quantunque i principj Statici e Idrostatici d'Archimede non incontrassero coltivatori, e restasse infeconda la stessa elementar notizia dell'ottiche refrazioni, pubblicata da Tolomeo, fu però vivissimo negli Antichi il trasporto per l'Astronomìa, a cui forse gli invitava non men la grandezza dello spettacolo che la superstiziosa speranza di indovinar l'avvenire. L'Egitto e la Caldea ebbero una folla d'Astrono-

mi; molti se ne contarono in Grecia; e più ancora al tempo dei Tolomei in Alessandria: ma qual progresso poteano essi fare in una Scienza sì complicata senza il soccorso della Meccanica e dell' Ottica? ridotti a fabbricare ipotesi o poco ferme o affatto strane, e a contentarsi d' osservazioni spesso erronee e sempre inesatte, obbligarono i Posteri a crear quasi di nuovo l' Astronomìa dopo aver gettati gli indispensabili fondamenti su cui si appoggia. Galileo ebbe la gloria di aprire il primo questa illustre carriera: contemplò la Dinamica e trovò le leggi dell' accelerazione uniforme dei gravi; passò all' Idraulica e dette dei precetti importanti sul movimento dell' acque; si rivolse all' Ottica, e costruì teoricamente il telescopio; si compiacque nell' Astronomìa, e non contando le vittoriose ragioni con cui sostenne l' ipotesi Copernicana, scoprì delle macchie nel Sole, dei Satelliti intorno a Giove, delle Stelle innumerabili nel Firmamento. Tutti i Dotti si affrettarono sull' orme del glorioso Toscano: la Francia vide un Cartesio, l' Olanda un Ugenio, la Germania un Leibnitz, l' Inghilterra un Newton, quel celebratissimo Newton che più sublime d' Apollonio, più straordinario d' Archimede e più universale del medesimo Galileo da cui tanto imparò, seppe inventar delle nuove armi per forzar la Natura ne' suoi ultimi nascondigli, e scorse il vasto Paese della Fisica Matematica con tutta l' aria d' un Conquistatore a cui nulla resiste. Allora si eclissò quanto vi fu mai di raro e d' ammirabile nei secoli trapassati, e l' Europa si trovò talmente ricca d' ingegni originali, che lo Storico Matematico dovrà ben lungamente occuparsi per tramandarne alla posterità le scoperte.

I nostri Elementi sono un piccolo Saggio di tante egregie fatiche: ma tale è la natura di questo Saggio, che se una volta riesca agli Studiosi d' impadronirsene (e non è punto difficile il riuscirvi), osiamo assicurargli del più rapido avanzamento allorchè vorranno continuar sui Classici il loro studio. Con questa mira abbiam preferita l' analisi alle sintetiche dimostrazioni che ad onta dell' esempio di Newton, tutti i Fisici hanno da lungo tempo abbandonate: per lo stesso fine si sono esposti con

un semplice risultato più di cento problemi, le cui soluzioni serviranno del pari e al compimento dell' Opera, e all' attual maneggio di quei principj che i grandi Autori suppongono ben familiari a chi legge. Possano i Giovani Matematici ricompensare un giorno le nostre fatiche col rendersi utili alla Patria ed a se stessi!



INDICE
DEI CAPITOLI

E d' alcune cose principali

Del Primo Tomo.

ELEMENTI DI MECCANICA

ELEMENTI DI IDROMECCANICA

PARTE I. TEORÌA DEI FLUIDI IN QUIETE

PARTE II. TEORÌA DEI FLUIDI IN MOTO

Natura dei fluidi in moto. Contrazion della vena nei lumi dei recipienti 150. Principio fondamentale dell' Idraulica e sue conseguenze 150 e *seg* Alveo dei fiumi e suo stabilimento 153 e *seg* Misura e riquadratura delle sezioni 154. Celerità media dell' acque correnti e modo di conoscerla col Quadrante idrometrico 156 e *seg*. Ostacoli al moto dell' acqua 158.

Urto dei fluidi in moto. Formula generale della resistenza sofferta in un solido che urta direttamente un fluido e sue conseguenze 159 e *seg*. Formula per l' urto obliquo e sua applicazione alla sfera 160 e *seg*. Formule della celerità e dello spazio nel moto orizzontale dei solidi tra i fluidi 163 e *seg*. Formule per il moto verticale all' ingiù e all' insù 167 e *seg*.

Moto dell' acqua nei Condotti. Formule per la quantità dell' acqua che esce da un piccol lume armato o disarmato 169. Applicazione ai getti d' acqua *ivi*. Formule per i Condotti di considerabil lunghezza 171. Grossezza dei Condotti che formano un getto 173. Avvertenze sulla costruzion dei Condotti 173 e *seg*.

Moto dell' acqua nei fiumi. Regole sulla tortuosità dei fiumi 176. Sulle inalveazioni 177. Sulla riunione dei fiumi 179. Sull' imboccatura e sbocco dei Canali 180. Sulle Colmate 182. Sui Navigli 183. Sui Diversivi 184 Fiumi liberi ed impediti 186. Misura dell' acqua nei fiumi liberi 187. Misura o pollice d' acqua 188 Determinazione della pendenza dei fiumi liberi 190. Regole sulla loro profondità e leggerezza 191. Applicazioni di queste dottrine *ivi* e *seg*. Metodi per aver la celerità media ne' fiumi impediti 193 e *seg*. Applicazione 196.

Macchine Idrauliche. Determinazione del massimo effetto d' una ruota mossa dall' acqua 197. Dimensioni d' una macchina idraulica 199. Problemi Idromeccanici da sciogliersi per esercizio *ivi* e *seg*.

Tavole dei rapporti delle misure più conosciute, e delle gravità specifiche di diverse materie ec. 208. e seg.

ELEMENTI

DI

FISICA MATEMATICA



L'Equilibrio e il movimento dei corpi ha data l'origine ad una Scienza vastissima che può riguardarsi come il fondamento di tutte le Scienze Fisico-Matematiche. Quando ella esamina l'equilibrio e il movimento dei corpi solidi, si chiama *Meccanica;* e quando tratta dell'equilibrio e movimento dei corpi fluidi, dicesi *Idromeccanica*.

ELEMENTI DI MECCANICA

1. LA Meccanica si divide in due parti: l'una è la *Dinamica o Scienza delle Forze,* la quale poichè considera le forze generatrici del moto e le varie proprietà del moto medesimo, può anche chiamarsi *Teorìa del Moto;* l'altra è la *Statica o Scienza dell' Equilibrio*, e questa, poichè specialmente si aggira sul modo di aumentar l'azione delle forze moventi, e compone una quantità di macchine che producono questo effetto, può anche chiamarsi *Teorìa delle Macchine*.

2. Sembra incredibile che vi sieno stati dei Filosofi impugnatori del moto; e allorchè si riflette ai lumi ed al genio superiore di Zenone e degli Stoici, si sarebbe tentati di sospettare che malamente applicando essi il volgare assioma ,, *per render ragione dei fenomeni naturali, non dee ricorrersi a Dio* ,, intendessero di negare non già l'esistenza del moto, ma la possibilità di spiegarla fisicamente. Infatti il moto è uno di quei primarj fenomeni per la cui spiegazione non vi vuol meno dell' Onnipotenza e della Vo-

bontà suprema del Creatore: una considerazione che ci sarà in seguito di qualche uso, non lascia dubbio su questo punto.

3. In qualunque aspetto si riguardi il vasto ammasso dei corpi che compongono l' Universo, e che son tutti compresi sotto il nome generico di *Materia*, non si giungerà mai a vedervi qualche intrinseca proprietà per cui possano da se medesimi determinarsi ad uno stato più che ad un altro. La materia ci comparisce sempre una sostanza necessariamente sorda e passiva, indifferente all' azione e all' inazione, al movimento e al riposo; una sostanza capace di tutte le possibili modificazioni, ma inabile a prenderne o a darne alcuna di suo arbitrio; in una parola, una sostanza il cui essenziale e distintivo carattere è l' *inerzia*. Or poichè si dee giudicar delle cose dalle idee che possono aversene, bisogna convenire che per necessità di natura, la materia è radicalmente inattuosa ed inerte.

4. Se la materia non ha dunque movimento da se medesima, e regna intanto un moto continuato nella materia (poichè tutto ci persuade che non vi è corpo alcuno in riposo assoluto) è forza che Dio, Agente immateriale e Principio unico della Natura, per mezzo di certe generali e primitive cagioni lo produca perpetuamente e lo rinnovi. I Fisici riducono a tre queste cagioni, cioè all' *impulsione*, all' *affinità* e all' *attrazione* o *gravità*. Non parleremo delle due prime che non interessano ora il nostro soggetto; e quanto alla terza, senza prender qui o a sostenerla contro i cattivi ragionatori, o a dimostrarla a chi tuttora ne stesse in dubbio, diremo solo che mille terrestri e celesti fenomeni; mille Fisici insigni, mille Astronomi d' un' esperienza consumata e d' una profondità straordinaria concorrono a gara ad attestarcene l' esistenza, e a stabilir per legge invariabile che *l' attrazione cresce e scema in ragione inversa dei quadrati delle distanze;* cosicchè se un corpo attratto dal centro C sia prima in A e poi in B; l' attra-
1. zione in A all' attrazione in B starà reciprocamente come CB^2 a CA^2.



PARTE PRIMA.

TEORÌA DEL MOTO

Natura del Moto.

LA dimora d' un corpo e di tutte le sue parti nel luogo stesso chiamasi *quiete;* il loro cangiamento di luogo dicesi *moto*. Or poichè il *luogo* occupato da un corpo nello spazio immenso che abbiam d' intorno, è o *assoluto* se ivi il corpo si trova, o *relativo* se la situazione del corpo è riferita a qualche oggetto che riposa o si muove: anche il moto del corpo può essere o *assoluto* o *relativo* secondo che il suo cangiamento è di luogo assoluto o di relativo. Quì parliamo del moto assoluto; il relativo propriamente appartiene all' Ottica, ed ivi ne tratteremo.

L' idea del moto comprende 1°. la *forza movente*: 2°. la *massa* del mobile: 3°. lo *spazio* che egli trascorre: 4°. il *tempo* che impiega a trascorrerlo: 5°. le *leggi* a cui costantemente obbedisce movendosi: 6°. gli *impedimenti* che incontra nel moversi.

5. La *forza movente* o *motrice* è quella che spingendo o attraendo il corpo, lo costringe a cangiar di luogo. Ella è o *momentanea* o *continuata*, e la continuata o è *costante* o *variabile*. Si dice *momentanea* quando abbandona il corpo nel momento medesimo in cui agisce sopra di lui, e si chiama *continuata* quando agisce sul corpo per tutto il tempo del moto. La *continuata costante* è quella che durante il moto non cresce nè scema, e la *continuata variabile* è quella che nel tempo del moto sempre cresce o sempre scema, o talora cresce e talora scema.

6. La *forza momentanea* produce il *moto uniforme* per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spazj eguali. In fatti la forza momentanea abbandona subito il corpo (5): ma egli attesa la sua inerzia non può da se stesso ridursi alla quiete o variare il suo moto (3); dunque il suo moto è uniforme.

7. La *forza continuata* produce il *moto vario*, per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spazj ineguali. Infatti la forza continuata agisce sempre sul cor-

po (5): dunque gli aggiunge o gli toglie sempre un nuovo moto; dunque il moto del corpo è vario. Di quì è che la forza continuata dicesi anche *acceleratrice* o *ritardatrice:* fisseremo tra poco il valore di questi termini.

8. La *forza continuata costante* produce quella specie di moto vario che dicesi *uniformemente accelerato* o *ritardato*, per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spazj con legge uniforme ineguali. Infatti la forza costante agisce sempre egualmente sul corpo (5); dunque il mobile acquista o perde sempre eguali gradi di moto; dunque il suo moto è sempre egualmente accresciuto o diminuito; dunque la legge degli aumenti o decrementi è uniforme; dunque il moto è uniformemente accelerato o ritardato.

9. La *massa* del corpo è la quantità di materia che lo compone; e poichè ciascuna molecula materiale è pesante, chiamate M, m due somme di molecule o due masse, e posta g la forza comune di gravità che le rende pesanti, saranno Mg, mg i pesi delle masse M, m; onde essendo $M : m :: Mg : mg$, si dee concludere che *le masse dei corpi son proporzionali o si stimano dal loro peso*. Errerebbe chi confondesse la massa col *volume* che è l' estensione occupata dal corpo, cioè la solidità o dimensione geometrica (L. 558): anzi son sì diversi tra loro il volume e la massa, che dalla combinazione di ambedue risulta la *densità* della materia.

10. Infatti poco vi vuole a comprendere che un corpo è tanto più o meno *denso* d' un altro, quanto direttamente è maggiore o minore la sua massa, e quanto reciprocamente è minore o maggiore il suo volume: onde poste D, d, M, m, V, v le densità, le masse e i volumi dei due corpi, si avrà (L. 264) $D : d :: M \times \frac{1}{V} : m \times \frac{1}{v} :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$.

11. E quì è importantissimo di osservare una volta per sempre che certe quantità puramente relative sogliono per compendio enunziarsi dai Matematici come assolute; talmente che quantunque un corpo non si chiami *denso* se non per il paragone che se ne fa con un altro corpo, nondimeno si costuma di dire assolutamente che *la densità è eguale alla massa divisa per il volume*, e abbandonata l' analogia $D : d : \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, si adopera cortamente l' equazione $D = \frac{M}{V}$

o l' altra $d = \frac{m}{v}$. La vera equazione sarebbe $D = \frac{dMv}{mV}$; ed è perciò chiaro che in $D = \frac{M}{V}$ si suppone tacitamente $d = 1$, $v = 1$, $m = 1$, cioè si prendono d, v, m per *unità* di densità, di volume e di massa. Per esempio, se dando all' acqua piovana come a termine di comparazione, una densità $d = 1$, il volume d' un piede cubico di essa si chiami $v = 1$, e la massa o peso di tal misura si ponga $m = 1$; la densità d' un' altra materia qualunque, relativamente all' acqua piovana, sarà $D = \frac{dMv}{mV} = \frac{M}{V}$. Così d' ordinario si trattano i tempi, gli spazj, le velocità e altre simili quantità relative.

Anzi va tant' oltre l' usanza, che talora s' incontreranno perfino queste o somiglianti espressioni: $z = \frac{a^2}{x} = \frac{1}{x}$, *perchè* a^2 *è costante;* $z = \frac{yx}{m} = yx$, *perchè* m *è costante*. Tali oscurissime parole e tali equazioni apparentemente erronee, divengon chiare e legittime, se si abbia in vista la nostra osservazione, e si rifletta che z è una quantità relativa; poichè l' analogìa portando in tal caso $Z : z :: \frac{a^2}{X} : \frac{a^2}{x} :: \frac{1}{X} : \frac{1}{x}$, ovvero $Z : z :: \frac{YX}{m} : \frac{yx}{m} :: YX : yx$, il Matematico enunzia assolutamente $z = \frac{a^2}{x} = \frac{1}{x}$ ovvero $z = \frac{yx}{m} = yx$, e si contenta d' avvertire che a^2 ovvero m son *costanti*, cioè che entrano, e secondo le note regole (L. 211), si sopprimono in ambedue i termini delle analogìe da cui ricavò quelle equazioni.

12. Lo *spazio* è la linea per cui scorre il corpo movendosi, e questa si misura con la *pertica*, col *braccio*, con la *tesa* ec.: ma le misure Francesi (L. 97) son divenute ormai sì comuni tra i Fisici ancor d' Italia, che per uniformarci al costume, le abbiamo noi pure adottate in questo Libro.

La linea trascorsa dal corpo è retta o curva. Il moto in linea retta relativamente ad una superficie piana, è

parallelo quando la linea del moto è sempre equidistante dalla superficie; è *diretto* o *perpendicolare* quando ella forma da ogni parte con la superficie un angolo di 90°; ed è *obliquo* quando l' angolo da qualche parte è maggiore o minor di 90: ma relativamente ad una superficie curva, il moto è *diretto* ovvero *obliquo* secondo che la linea del moto passa o non passa per il centro di curvatura. Il moto in linea curva è d' infinite specie. In generale la *direzion del moto* è la posizion della linea che il corpo trascorre se il moto è *rettilineo*, la sua direzione è la stessa linea retta trascorsa; e se è *curvilineo*, la direzione è la tangente a quel punto della curva ove il mobile attualmente si trova.

13. Il *tempo* è la durazione del moto e si misura con l' *ore*, coi *minuti*, coi *secondi* ec.: ma i secondi ne sono la misura più ordinaria; cosicchè tutte le volte che il tempo del moto non sarà specialmente espresso, dovrà intendersi un moto che ha durato o può aversi in 1″ o in un *momento* di tempo.

Quindi anche il momento in cui la forza momentanea agisce sul corpo (5), sarà per lo più 1″: ma quando pur fosse 1‴, 1⁗, 1′′′′′ ec.: potrà sempre concepirsi in questo momento un' infinità di tempi più piccoli, mentre è noto che per esempio, 1′′′′′ è divisibile in 60′′′′′′, 1′′′′′′ in 60′′′′′′′ ec., (L. 96), fino all' *istante*, che è per noi il limite di due contigue porzioni di tempo.

14. Chiamansi *leggi del moto* quelle regole che Dio ha stabilite nella Natura per produrlo, conservarlo, comunicarlo, distruggerlo ec. Risultano esse dall' indole e costituzione della materia, e dalla sua relazione alla forza meccanica; le più generali son tre:

I. *Ogni corpo si mantiene nel suo stato di quiete o di moto uniforme e rettilineo finchè una cagione esterna non lo forzi ad abbandonar quello stato*. Infatti la materia non può da se stessa passar da uno stato ad un altro (3); dunque se un corpo è in quiete, non potrà dare a se stesso un moto; e se è in moto, non potrà toglierselo; dunque mosso una volta, non potrà variare il suo moto che sarà perciò uniforme (6); dunque giacchè ogni moto comincia necessariamente con una linea retta almeno infinitesima, il mobile non potendo per se medesimo cangiar direzione, avrà un moto rettilineo. Perciò se un corpo si muove, è

certo che fu spinto o attratto; se il suo moto si estingue, è segno che incontrò degli ostacoli; se accelera o ritarda, convien dire che qualche forza continuamente lo sollecita o gli si oppone; se descrive un poligono di finiti o d' infiniti lati, è questo un indizio che la forza movente cangia direzione o di tanto in tanto o ad ogni istante, e quando improvvisamente ella cessi, il mobile anderà nella direzione del lato in cui si trova.

15. II. *La mutazione dello stato in un corpo allorchè passa dalla quiete al moto, è proporzionale alla forza motrice, e seconda la linea retta nella cui direzione questa forza s' imprime*. Poichè non potendo nascer la mutazione dal corpo stesso (3), sarà prodotta unicamente dalla forza impressa; onde la doppia forza produrrà un doppio moto, la tripla un moto triplo ec., e il moto sarà proporzionale alla forza: e giacchè non può esser nel corpo ragione alcuna per cui la direzion del suo moto sia diversa dalla direzion della forza, avranno dunque ambedue una medesima direzione.

16. III. *La reazione è eguale e contraria all' azione, cioè l' azioni di due corpi l' un contro l' altro son sempre eguali e si dirigono in parti opposte*. Imperocchè l' inerzia della materia (3) fa che indipendentemente ancora dalla gravità, ella resista in tutti i sensi al moto quando è in quiete, e alla quiete quando è in moto, proprietà a cui si è dato il nome di *forza d' inerzia*. Or tutti sanno che vi vuole un' istessa forza e per dare e per togliere un certo moto ad un corpo, e che è tanto maggiore la sua resistenza alla quiete o al moto, quanto è più grande la sua massa ed il moto che gli si vuol togliere o dare: onde la forza d' inerzia è proporzionale e alla massa del corpo e al cangiamento del suo stato attuale. Quando dunque un corpo va contro di un altro, questo per la sua forza d' inerzia resiste a quello, e perciò distrugge in quello tanto di forza, quanto ha egli di resistenza: ora la porzione della forza distrutta chiamasi *azione*, e la resistenza che la distrugge, dicesi *reazione*; dunque la reazione è contraria ed eguale all' azione. E da ciò si raccoglie che la forza d' inerzia è il mezzo per cui si comunica il moto da un corpo ad un altro: ogni corpo resiste al moto e nel resistervi lo riceve: e poichè la reazione è contraria ed eguale all' azione, un corpo riceve precisamente tanto moto, quanto ne distrugge nel corpo che glielo dà.

Le leggi di *Continuità* e di *Risparmio* che qualche Fisico ha introdotte nel moto, non sono di alcun uso in questi Elementi e perciò non ci fermiamo a parlarne.

17. Dicesi in generale *impedimento del moto* la resistenza che fanno ad un mobile i corpi tra cui si muove. Ella nasce e dall' *impenetrabilità* dei corpi medesimi che non danno passaggio al mobile se non sieno spinti e discacciati da lui, e dall' *attrito* o sfregamento del mobile sopra quei corpi che gli servono di sostegno. Dall' aria, dall' acqua e dagli altri *mezzi* o fluidi nasce ordinariamente il primo impedimento, come dal legno, dal ferro e dagli altri solidi è cagionato il secondo. Sarebbe impossibile di fissar qualche cosa nella Scienza del moto se non si facesse astrazione da questi ostacoli: onde riserbando ad altro luogo il particolare esame e dell' attrito dei solidi e della resistenza dei mezzi, intendiamo quì di stabilire le proprietà del moto come se nulla vi si opponesse nella Natura.

Moto uniforme e vario.

18. Il moto prodotto dalla forza momentanea si chiama *uniforme* (6), e l' attitudine che questa forza partecipa al mobile di trascorrere un certo spazio in un certo tempo, dicesi *celerità:* onde per aver la celerità del moto uniforme bisogna combinar lo spazio col tempo. Infatti si sa che un corpo è tanto più o meno *celere* d' un altro, quanto direttamente è maggiore o minore lo spazio che egli trascorre, e quanto reciprocamente è minore o maggiore il tempo che impiega a trascorrerlo: onde chiamando C, c, S, s, T, t le celerità, gli spazj ed i tempi, avremo (L. 264)

$$C : c :: S \times \frac{1}{T} : s \times \frac{1}{t} :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}, \text{ e quindi } C = \frac{S}{T}, \ (11),$$

cioè *la celerità di un corpo nel moto uniforme eguaglia lo spazio diviso per il tempo.*

19. Che se voglia sapersi la quantità del moto che la forza produce nel mobile, basterà osservare che quel moto è l' effetto di questa forza: e poichè la cagione si misura dal suo effetto (15), avranno una stessa misura e perciò saranno in questo senso altrettante voci equivalenti, *il moto, la quantità del moto, l' effetto del moto* e *la forza movente*. Ora l' effetto della forza momentanea, cioè il moto

uniforme

uniforme (6), consiste nel dare in un momento ad una certa massa una certa celerità; onde il moto dipende dalla combinazion dell' una coll' altra. Infatti la forza si stima tanto più o men grande d' un'altra, quanto è maggiore o minore e la massa che muove e la celerità che le imprime in un momento: e però chiamando 1 il momento, F, f, C, c, M, m le forze, le celerità e le masse, si avrà (L. 263) $F \times 1 : f \times 1 :: C \times M : c \times m$, e quindi (11) $F \times 1 = F = MC$, cioè *la forza momentanea o la quantità del moto eguaglia il prodotto della celerità per la massa*.

20. Due son dunque le formule fondamentali del moto uniforme: 1ª. $C = \frac{S}{T}$; 2ª. $F \times 1 = F = CM$. Sostituendo nella seconda il valor di C preso dalla prima, si ha $FT = MS$, e con queste tre equazioni può formarsi la seguente

T A V O L A

Per il moto uniforme.

	Date	si ha	Formule
21.	F, M	C	$C = \frac{F}{M}$
22.	S, T		$C = \frac{S}{T}$
23.	C, M	F	$F = CM$
24.	M, S, T		$F = \frac{MS}{T}$
25.	C, F	M	$M = \frac{F}{C}$
26.	F, S, T		$M = \frac{FT}{S}$
27.	C, T	S	$S = CT$
28.	F, M, T		$S = \frac{FT}{M}$
29.	C, S	T	$T = \frac{S}{C}$
30.	F, M, S		$T = \frac{MS}{F}$

31. Questa Tavola non solamente fa conoscere le proprietà tutte del moto uniforme, ma anche tutte le relazioni tra due moti uniformi diversi. Abbiansi, per esempio, due moti uniformi in cui gli spazj trascorsi siano come i cubi dei tempi, e si voglia la ragione delle celerità; è chiaro che trattandosi di spazj, tempi e celerità, ha luogo la formula $C = \frac{S}{T}$ (22) per l' uno, e $C' = \frac{S'}{T'}$ per l'altro moto; e poichè si suppone $S : S' :: T^3 : T'^3$, preso di quì il valore d' una quantità qualunque, come di S', si avrà (L. 209) $S' = \frac{ST'^3}{T^3}$, onde $C' = \frac{ST'^3}{T^3 T'} = \frac{ST'^2}{T^3}$, e però $C : C' :: \frac{S}{T} : \frac{ST'^2}{T^3} :: T^2 : T'^2$, cioè le celerità saranno come i quadrati dei tempi, ec.

32. Passando ora al moto vario (7), osservo che supposta finita la celerità c acquistata nel tempo finito t, l'acquistata nel tempo infinitesimo $\frac{t}{\infty} = dt$ (L. 842) sarà infinitesima o $\frac{c}{\infty}$. Poichè se in un tempo infinitesimo si acquistasse una celerità finita, in un tempo finito se ne acquisterebbe una infinita, contro l' ipotesi. Dunque in un tempo infinitesimo l' aumento o il decremento di c sarà infinitesimo, e la total celerità del corpo in moto diverrà $c \pm \frac{c}{\infty} = c$ (L. 197. 6°): perciò per un tempo dt la celerità variabile e il moto vario che ne risulta, posson prendersi per uniformi.

33. Ora nel moto uniforme, chiamando x lo spazio, si ha $c = \frac{x}{t}$ (22), cioè $1 : c :: t : x$. Ma t nel presente caso è un tempo infinitesimo dt; dunque $1 : c :: dt \left(= \frac{t}{\infty}\right) : x = \frac{ct}{\infty} = (27) \frac{s}{\infty} = ds$, cioè lo spazio x trascorso in questo tempo, è un infinitesimo ds; dunque nel moto vario avremo $c = \frac{ds}{dt}$.

34. Di nuovo, nel moto uniforme, chiamando z la ce-

lerità, abbiamo $F \times 1 = Mz$ (20), cioè $M : F :: 1 : z$. Ma 1 nel presente caso è un tempo infinitesimo (13) $= \frac{t}{\infty}$ (L. 197. 1°) $= dt$: dunque $M : F :: \frac{1}{\infty} : z = \frac{F}{\infty M} = \frac{c}{\infty}$ (21) $= \pm\, dc$, cioè la celerità z generata o distrutta in questo tempo, è un infinitesimo $\pm\, dc$, preso il segno $+$ quando la forza è acceleratrice e genera una nuova celerità, e il segno $-$ quando è ritardatrice e l' estingue (7); dunque nel moto vario avremo $Fdt = \pm\, Mdc$. Fatto $\frac{F}{M} = \varphi$, si ha $\varphi dt = \pm\, dc$ ove φ che dipende da F, generalmente parlando, varia come F in ciascun punto del moto.

Due son dunque anche per il moto vario le formule fondamentali, e da queste posson dedursene altre tre; eccole tutte insieme:

35. I^a. $c = \frac{ds}{dt}$.

36. II^a. $\varphi dt = \pm\, dc$.

37. Differenziando la prima, si ha la III^a. $dc = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

38. Combinando le due prime, nasce la IV^a. $\varphi ds = \pm\, cdc$.

39. Combinando la seconda e la terza, si ottiene la V^a. $\varphi dt = \pm\, d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ove secondo l' occorrenze, potrà prendersi ds o dt costante.

40. Fissiamo ora il vero senso della quantità φ. Si è fatto $\varphi = \frac{F}{M}$ (34): ma $\frac{F}{M} = C$ (21) $= \frac{S}{T}$ (22) $= \frac{S}{1''} = S$; dunque I°. $\varphi = C$, cioè φ è quella celerità C che l' attual vigore della forza acceleratrice F divenuta momentanea, produrrebbe nel mobile: II°. $\varphi = S$, cioè φ è quello spazio S che per la forza acceleratrice F divenuta momentanea, trascorrerebbe il mobile con moto uniforme nel tempo $T = 1''$. Si noti intanto 1°. che il moto essendo vario, non si manterrà nel secondo tempo T', nel terzo T'' ec. quale era nel primo tempo T; onde nel secondo, nel terzo ec. non si avrà più $\varphi = C = S$, ma $\varphi = C' = S'$, $\varphi = C'' = S''$ ec., e φ varierà ad ogni momento come già si

avvertì (34): 2°. che quantunque φ denoti in rigore una celerità o spazio, i Meccanici però intendon per φ la forza stessa acceleratrice, mentre è ordinario in Dinamica di chiamar *forze* gli effetti che esse producono (19): di modo che posta F la forza motrice, $\frac{F}{M} = \varphi$ sarà per noi la forza acceleratrice.

Moto uniformemente accelerato e ritardato.

41. Ha insegnato l'esperienza (e noi lo dimostreremo altrove) che i corpi abbandonati alla lor gravità, scendo-
1 no perpendicolarmente alla superficie HNP quasi sferica della Terra, e nella nostra *latitudine* trascorrono in 1″ uno spazio di $15^{pie.}$, $0915 = 15^{pie.}$, 1 in circa. Chi da queste osservazioni volesse dedurre che le direzioni BH, DI son convergenti, e che l'attrazione scemando come crescono i quadrati delle distanze (4), fa trascorrere al mobile uno spazio sempre più piccolo in B, in A ec., ragionerebbe a rigore: per altro la distanza quasi infinita del Centro C dalla superficie HN, ci autorizza a dire con egual verità, che dentro certi limiti, le direzioni BH, DI posson prendersi per parallele, e la forza d'attrazione o di gravità per costante.

42. Infatti posto il raggio terrestre $CH = 19631100^{pie.}$, $HB = 200^{pie.}$, $BD = 100^{pie.}$, avremo $tang. C = \frac{BD}{CB} = \frac{1}{196313}$ (L. 646) fatto $R = 1$, e $L\, tang\, C = L1 - L\, 196313 = L\, tang\, 0°, 0', 1''$ incirca; onde (L. 513) $D = 89°, 59', 59'' = 90°$ vicinissimamente; dunque dentro i limiti almeno di $BD = 100^{pie.}$, le direzioni BH, DI dei gravi cadenti son fisicamente parallele.

43. Di nuovo, preso il raggio terrestre $CB = r = 19631100^{pie.}$, una distanza $BA = d = 12000^{pie.}$, l'attrazione in B o l'effetto di lei $a = 15{,}0915$ (41), se l'attrazione in A si chiami z, avremo $(r + d)^2 : r^2 :: a : z$ (4), onde $z = \frac{ar^2}{(r+d)^2} = 15^{pie.}, 073$, cioè la differenza tra l'attrazione in B sulla Terra ed in A alla distanza di $12000^{pie.}$ è minore di $\frac{1}{50}$ di piede; dunque dentro i limiti al-

meno di $2000^{\text{tes.}}$, la forza di gravità è sensibilmente costante, e il moto dei gravi che per questo spazio scendono o salgono, è vario ma uniformemente accelerato o ritardato (8).

44. Quindi per trovar la celerità in B d'un grave cadente (a cui per maggiore universalità supporremo impressa all'ingiù una celerità nota p), ed avere il tempo che impiega a scendere da A in B, chiamata c la celerità finale in B, s lo spazio AB, t il tempo speso a trascorrerlo, e g la forza acceleratrice ϕ di gravità (40), avremo $gds = cdc$ (38). Ora questa formula che naturalmente non sarebbe integrabile (34), lo è nel nostro caso perchè g è costante (43); onde integrando, si ha $gs = \frac{c^2}{2} + Cost.$ (L. 855). Per determinar la *Costante*, osservo che quando il mobile è in A, cioè quando $s = 0$, ha la sola celerità p che gli fu impressa sul principio del moto, e però allora $c = p$; dunque $0 = \frac{p^2}{2} + Cost.$, e quindi $Cost. = -\frac{p^2}{2}$, onde infine $gs = \frac{c^2 - p^2}{2}$ e $c = \sqrt{(2gs + p^2)}$. 1

Avremo ancora $c = \frac{ds}{dt}$ (35) ovvero $dt = \frac{ds}{\sqrt{(2gs + p^2)}}$; ove fatto $\sqrt{(2gs + p^2)} = x$ e però $ds = \frac{xdx}{g}$, sarà $dt = \frac{dx}{g}$; ed integrando, $t = \frac{x}{g} + Cost. = \frac{\sqrt{(2gs + p^2)}}{g} + Cost.$ La Costante si determinerà se si rifletta che quando $t = 0$, anche $s = 0$, dal che si ha $0 = \frac{p}{g} + Cost.$, e però $Cost. = -\frac{p}{g}$, onde infine $t = \frac{\sqrt{(2gs + p^2)} - p}{g}$.

Dalla prima equazione abbiamo $s = \frac{c^2 - p^2}{2g}$; dalla seconda $s = \frac{gt^2}{2} + pt$, e se i valori di g, p presi dall'una, si sostituiscano nell'altra, si troverà $s = \frac{t(c + p)}{2}$, $s = ct - \frac{gt^2}{2}$, con le quali quattro equazioni, che danno la quinta $p = c - gt$, si ha la seguente

TAVOLA

Per il moto uniformemente accelerato.

	Date	si ha	Formule
45.	g, p, s	c	$c = \sqrt{(2gs + p^2)}$
46.	g, p, t		$c = gt + p$
47.	g, s, t		$c = \frac{s}{t} + \frac{gt}{2}$ *
48.	p, s, t		$c = \frac{2s}{t} - p$
49.	c, p, s	g	$g = \frac{c^2 - p^2}{2s}$
50.	c, p, t		$g = \frac{c - p}{t}$
51.	c, s, t		$g = \frac{2}{t}(c - \frac{s}{t})$ *
52.	p, s, t		$g = \frac{2}{t}(\frac{s}{t} - p)$
53.	c, g, s	p	$p = \sqrt{(c^2 - 2gs)}$ *
54.	c, g, t		$p = c - gt$ *
55.	c, s, t		$p = \frac{2s}{t} - c$ *
56.	g, s, t		$p = \frac{s}{t} - \frac{gt}{2}$ *
57.	c, g, p	s	$s = \frac{c^2 - p^2}{2g}$
58.	c, g, t		$s = t(c - \frac{gt}{2})$ *
59.	c, p, t		$s = t(\frac{c + p}{2})$
60.	g, p, t		$s = t(\frac{gt}{2} + p)$
61.	c, g, p	t	$t = \frac{c - p}{g}$
62.	c, g, s		$t = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 2gs)}}{g}$ *
63.	c, p, s		$t = \frac{2s}{c + p}$
64.	g, p, s		$t = \frac{\sqrt{(2gs + p^2)} - p}{g}$

65. In questa Tavola che fa conoscere le proprietà tutte del moto uniformemente accelerato, son segnate con * l' otto formule che divengono inutili, quando non si supponga impressa nel mobile alcuna celerità iniziale, cioè quando $p = 0$: nell' altre è manifesto che se sia $p = 0$, bisogna sopprimere i termini ove si trova p.

66. Applicazioni. I. Poichè fatto $p = 0$, si ha $s = \frac{gt^2}{2}$ (60), e per un altro spazio s' si avrebbe $s' = \frac{gt'^2}{2}$, sarà $s : s' :: \frac{gt^2}{2} : \frac{gt'^2}{2} :: t^2 : t'^2$; ma $t = \frac{c}{g}$ (61) onde $t^2 : t'^2 :: \frac{c^2}{g^2} : \frac{c'^2}{g^2} :: c^2 : c'^2$; dunque *gli spazj trascorsi dal principio del moto sono come i quadrati de' tempi o delle celerità*. Poichè dunque in 1″ si ha $s = 15^{\text{pie.}}, 1$ (41), sarà $15,1 : s' :: 1 : t'^2$; onde se $t' = 3''$, sarà $s' = 135^{\text{pie.}}, 9$ e se $s' = 2174^{\text{pie.}}, 4$, sarà $t'^2 = 144$ e $t' = 12''$ ec.

II. Diviso pertanto in eguali porzioni il tempo del moto onde la prima sia t, le due prime $2t$, le tre prime $3t$ ec., se gli spazj trascorsi in questi tempi sieno s, s', s'' ec., saranno s, $s' - s$, $s'' - s'$ ec. gli spazj trascorsi in tempi eguali; e giacchè (60) $s = \frac{gt^2}{2}$, $s' = \frac{4gt^2}{2} = 4s$, $s'' = \frac{9gt^2}{2} = 9s$ ec., gli spazj in tempi eguali saranno s, $s' - s = 3s$, $s'' - s' = 5s$ ec. Ora questi termini crescono come i numeri impari; dunque *nel moto uniformemente accelerato gli spazj trascorsi in porzioni eguali di tempo formano la serie* $1, 3, 5, 7 \ldots\ldots 2m + 1$. Quindi poichè posto $t = 1''$ si ha $s = 15^{\text{pie.}}$ in circa (41), nel seguente minuto″ si avrà $s' - s = 3s = 45^{\text{pie.}}$, ec.

67. Serve anche la nostra Tavola a far conoscere le relazioni tra due moti uniformemente accelerati e diversi. Date, per esempio, le forze g, g' e i tempi t, t', vogliasi la ragione di due spazj s, s' che furon trascorsi con due diversi moti: è chiaro che si avrà $s : s' :: \frac{gt^2}{2} : \frac{g't'^2}{2} :: gt^2 : g't'^2$,

cioè gli spazj saranno in ragion composta delle forze e dei quadrati dei tempi. Quindi poichè, ad egual distanza dal centro terrestre, due gravi di differenti masse M, M′ debbono evidentemente percorrere spazj eguali in tempi eguali, sarà in questo caso $s = s'$, $t = t'$, e (34.44) $g\,(= \frac{F}{M}) = g'\,(= \frac{F'}{M'})$; dunque $F : F' :: M : M'$, cioè *le forze d' attrazione o di gravità, son proporzionali alle masse.*

68. Le formule dei numeri 49. 50. 51. 52. servono a determinar g allorchè si conoscono tre delle quattro quantità c, p, s, t. Con questo mezzo si troverebbe la forza acceleratrice dei gravi liberamente cadenti verso la superficie del Sole, di Saturno, di Giove ec.: e quanto alla Terra, poichè si sa che in 1″ un grave trascorre $15^{pie.}$, 0915 (41), sarà $t = 1''$, $s = 15,0915$, e quindi (52) $g = \frac{2s}{t^2} = 30,183$, cioè (40) la forza acceleratrice terrestre genera in 1″ tanta celerità da far trascorrere al grave in questo tempo e con moto uniforme, uno spazio di $30^{pie.}$, $183 = 30,2$ in circa.

Onde la nostra Tavola può anche adòperarsi a paragonare il moto uniforme con l' uniformemente accelerato.

69. Applicazioni. I. Supposto che un mobile scorrendo con moto uniformemente accelerato uno spazio s, si trovi infine con una celerità c: quale spazio S trascorrerà nel tempo stesso con moto uniforme e con la stessa celerità finale c? Sarà dunque $C = c$ e $T = t$: ma $s = \frac{ct}{2}$ (59) ed $S = CT$ (27); dunque $S = ct$, cioè *de' due spazj trascorsi in egual tempo, l' uno con moto uniformemente accelerato, l' altro con moto uniforme e con la celerità finale di quello, il secondo è doppio del primo.*

II. Quale spazio s avrebbe dovuto trascorrere con moto uniformemente accelerato un corpo, che con moto uniforme trascorre lo spazio $S = 100^{pie.}$ in un tempo $T = 3''$? Poichè son dati S, T, si avrà $C = \frac{S}{T}$ (22): ma la celerità C è la celerità finale c del supposto moto uniformemente

mente accelerato; dunque $c = C = \frac{S}{T}$. Ora $s = \frac{c^2}{2g}$ (57); dunque $s = \frac{S^2}{2gT^2} = \frac{10000}{2.30,2.9}$ (68) $= 18^{\text{pie.}},4$.

70. Questo spazio $s = \frac{S^2}{2gT^2}$ dicesi dai Meccanici *altezza dovuta ad una data celerità* C, come all' incontro chiamasi C la *celerità dovuta ad una data altezza s*, cioè a quell' altezza da cui un mobile dovrebbe cadere per acquistar la celerità C: e poichè per una celerità C si avrebbe $s = \frac{S^2}{2gT^2} = \frac{C^2}{2g}$ (69) e per una celerità C′ si avrebbe $s' = \frac{C'^2}{2g}$ onde $C : C' :: \sqrt{s} : \sqrt{s'}$, ne segue che *le celerità acquistate sono come le radici dell'altezze a loro dovute*.

71. Dal che si raccoglie che quanto abbiam detto del moto uniformemente accelerato nel caso di $p = 0$ (66), ha luogo del pari nel caso di $p > 0$: poichè fatto $\frac{p^2}{2g} = a$, sarà a l' altezza dovuta alla celerità p (70); dunque il mobile potrà supporsi caduto dall' altezza $a + s$ coi consueti fenomeni dell' accelerazione, e tutta la differenza del moto consisterà nell' aver egli al fine dello spazio s quella stessa celerità, che senza l' iniziale p, avrebbe solamente al fine dello spazio $a + s$.

72. Quanto al moto uniformemente ritardato (in cui per distinzione, invece di c, s, t useremo le lettere greche χ, σ, τ) se il corpo B si spinga verticalmente in su per $BA = \sigma$ con una data celerità p, e voglia sapersi la sua celerità χ in A, e il tempo τ che impiega a salirvi, bisognerà prender la formula $gd\sigma = -\chi d\chi$ (38) che conviene alla forza ritardatrice (34), ed integrando tanto questa quanto l' altra $\chi = \frac{d\sigma}{d\tau}$ (35) come si è fatto sopra alle loro compagne (44), si troveranno primieramente le due equazioni $\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$, $\sigma = p\tau - \frac{g\tau^2}{2}$; e poi operando pur come sopra, si otterranno le altre due $\sigma = \frac{\tau(\chi + p)}{2}$, $\sigma = \chi\tau + \frac{g\tau^2}{2}$, con le quali e con la quinta $p = \chi + g\tau$ che ne risulta, può formarsi la seguente

TAVOLA

Per il moto uniformemente ritardato.

	Date	si ha	Formule
73.	g, p, σ	χ	$\chi = \sqrt{(p^2 - 2g\sigma)}$
74.	g, p, τ		$\chi = p - g\tau$
75.	g, σ, τ		$\chi = \frac{\sigma}{\tau} - \frac{g\tau}{2}$
76.	p, σ, τ		$\chi = \frac{2\sigma}{\tau} - p$
77.	χ, p, σ	g	$g = \frac{p^2 - \chi^2}{2\sigma}$
78.	χ, p, τ		$g = \frac{p - \chi}{\tau}$
79.	χ, σ, τ		$g = \frac{2}{\tau}(\frac{\sigma}{\tau} - \chi)$
80.	p, σ, τ		$g = \frac{2}{\tau}(p - \frac{\sigma}{\tau})$
81.	χ, g, σ	p	$p = \sqrt{(2g\sigma + \chi^2)}$
82.	χ, g, τ		$p = \chi + g\tau$
83.	χ, σ, τ		$p = \frac{2\sigma}{\tau} - \chi$
84.	g, σ, τ		$p = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{g\tau}{2}$
85.	χ, g, p	σ	$\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$
86.	χ, g, τ		$\sigma = \tau(\chi + \frac{g\tau}{2})$
87.	χ, p, τ		$\sigma = \tau(\frac{\chi + p}{2})$
88.	g, p, τ		$\sigma = \tau(p - \frac{g\tau}{2})$
89.	χ, g, p	τ	$\tau = \frac{p - \chi}{g}$
90.	χ, g, σ		$\tau = \frac{\sqrt{(\chi^2 + 2g\sigma)} - \chi}{g}$
91.	χ, p, σ		$\tau = \frac{2\sigma}{\chi + p}$
92.	g, p, σ		$\tau = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 2g\sigma)}}{g}$

 FIG.

Questa Tavola comprende le proprietà tutte di uno o più moti uniformemente ritardati, e le relazioni tra l'accelerato, il ritardato e l'uniforme. Basti un esempio.

93. Poichè un mobile cadendo da A liberamente (cioè fatto $p = o$), e trascorrendo $AB = \frac{c^2}{2g}$ (57), acquista in B la celerità finale c, se si supponga che con questa medesima celerità sia rispinto da B in alto, e si voglia lo spazio totale che trascorrerà all' insù, troveremo $\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$ (85): ma per ipotesi $p = c$ e $\chi = o$, perchè nel punto estremo dello spazio totale il mobile ha perduta ogni celerità; dunque $\sigma = \frac{c^2}{2g} = s$; dunque *la celerità acquistata da un corpo cadendo può farlo risalire all' altezza da cui partì*. Dal che può dedursi che le proprietà del moto uniformemente ritardato son simili in senso contrario a quelle che osservammo nell' uniformemente accelerato (66). 1

94. Anche il moto per i piani inclinati è uniformemente accelerato o ritardato: ne parleremo in breve. Quì frattanto si osservi che le varie specie di moto considerate finora, offrono questo teorema importante: *se le forze moventi sieno come i prodotti delle masse negli spazj trascorsi, i tempi de' moti saranno eguali*. Le formule già stabilite (20. 33. 34. 44. 72.) ne danno spontaneamente la dimostrazione.

Moto composto

Se la forza motrice è unica, il moto, di qualunque specie egli sia, ordinariamente si chiama *semplice:* ma se un *sistema di forze*, cioè più forze unite insieme, agiscano contemporaneamente sul corpo con differenti direzioni, il moto o sia uniforme o sia vario, si chiama *composto*.

95 Sia dunque il mobile M (dalla cui gravità si prescinde per ora) e le due forze *omogenee* F, *f* con le direzioni ME, MI in angolo: se la forza semplice F faccia scorrere ad M lo spazio $ME = S = s$ nel tempo stesso T in cui la forza semplice *f* gli fa scorrere lo spazio $MI = S' = s'$, quale spazio gli faranno scorrere riunite in sistema, nel medesimo tempo T? Diviso il comun tempo T in parti qualunque eguali a cui corrispondano le parti MB, BD, DE ed MR, RH, HI degli spazj totali ME, MI, 2.

2 si conducano da B, D, E e da R, H, I le parallele ad MI, ME. È manifesto che o F agisca immediatamente sul mobile M, o spinga tutta la MI parallelamente a se stessa mentre il mobile la trascorre, dovrà risultarne per M lo stesso moto composto. In questo secondo caso, quando M sarà giunto in R lungo MI, la MI sarà passata in B lungo ME, onde M si troverà in K; quando sarà giunto in H, la MI sarà passata in D, onde M si troverà in L; e quando sarà giunto in I, la MI sarà passata in EN, onde M si troverà in N: cosicchè nel tempo T il mobile anderà da M in N per K ed L. Or le due forze F, f sono omogenee; dunque le parti degli spazj percorse in egual tempo, saranno proporzionali agli interi spazj percorsi nel comun tempo T, e si avrà $F:f::\frac{MS}{T}:\frac{MS'}{T}$ (26) $::S:S'::$ $g:g'$ (67) $::gt^2:g't^2::s:s'$ (60) $::ME:MI::MB:MR::$ $MD:MH::NI:IM::KR:RM::LH:HM$; dunque (L. 470) i punti M, K, L, N appartengono al lato del triangolo MIN simile ai triangoli MRK, MHL, e questi punti sono nella diagonale MN del parallelogrammo IE; dunque in generale *il corpo* M *spinto dalle forze omogenee* F, f, *va per la diagonale del parallelogrammo fatto dalle rette* ME, MI *rappresentanti le forze, nel tempo stesso in cui l' una lo condurrebbe da* M *in* E, *l' altra da* M *in* I. Segue da ciò

96. 1°. Che la diagonale MN rappresenta l' effetto delle forze congiunte F, f: onde chiamando Φ la forza composta che spinge il corpo per MN, si avrà F rappresentata da ME, f da MI, Φ da MN e quindi $F:f:\Phi::$ $ME:MI:MN$. La forza composta $=$ MN dicesi la *risultante* o ella cospiri con le forze F, f operando nel senso medesimo; o si opponga ad esse, e perciò le distrugga, operando in senso contrario.

97. 2°. Che descritto col raggio MI l'arco IST, e condotte sopra ME le normali IG, SQ, e sopra MN la normale IR, avremo $F:f:\Phi::ME:MI:MN::ME:EN:NM::$ *sen* MNE : *sen* NME : *sen* MEN (L. 636) :: *sen* IMN : *sen* NME : *sen* IME (L. 414. 613) :: IK : SQ : IG, cioè *qualunque delle tre forze potrà sempre rappresentarsi col seno dell' angolo che è compreso tra le direzioni dell' altre due*.

98. 3°. Che le direzioni ME, MI, le quali si tagliano in M, sono in uno stesso piano (L. 531); e poichè la

direzione MN è nel piano del parallelogrammo IE di cui 2
è diagonale, bisogna concludere che *le direzioni di due forze quando s' incontrano, son sempre nel piano medesimo con la direzione della lor risultante*.

99. 4°. Che producendosi uno stesso effetto dalle forze congiunte F, f e dalla lor risultante Φ, potrà Φ sostituirsi ad F, f; e reciprocamente ogni forza unica Φ potrà risolversi nelle due F, f: anzi riguardando F, f come risultanti ciascuna di altre due ec. in infinito, *qualunque sia il numero* n *delle forze che nel tempo stesso e nello stesso piano agiscono sul corpo* M, *esse potranno sempre ridursi ad un numero* n — 1, n — 2, n — 3 ec.; e reciprocamente *ogni forza unica potrà risolversi in* 2, 3, 4 . . . . . n *forze, purchè le componenti sieno lati di parallelogrammi che abbian per risultante la diagonale*.

Il parallelogrammo IE chiamasi *parallelogrammo delle forze*, e da esso derivano i generali principj dell' equilibrio. Ci sia permesso di darne un cenno per modo almeno di digressione: ogn' altro luogo sarebbe meno a proposito del presente.

100. Fatta ME $= a$, MI $=$ EN $= b$, e l' angolo MEN $= x$, avremo (L. 652) MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2ab \cos x}{R})}$.

Or supposto R $= 1$ e differenziando quest' equazione per aver la massima risultante MN, verrà $\frac{d(\text{MN})}{dx} = \ldots$;

$\frac{ab \text{ sen } x}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)}} = 0$ (L. 878); cioè 1°. $ab \text{ sen } x = 0$;
2°. $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)} =$ MN $= 0$. Fermiamoci a considerar queste due formule.

101. I°. Poichè $ab \text{ sen } x = 0$, sarà $\text{sen } x = 0$, onde 1°. $x = 180°$ e $\cos x = -1$; 2°. $x = 0$ e $\cos x = 1$ (L. 611). Nel primo caso, l' angolo x ottuso dà il massimo MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)} = a + b$; nel secondo, l' angolo x acuto dà il minimo MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)} = a - b$ (L. 652): onde si ha la massima MN $(= a + b)$ quando EN $(= b)$ gira in fuori facendo un angolo MEN $= x = 180°$ e forma perciò una sola retta con ME $(= a)$; allora la forza MI, sempre parallela ad EN, gira indentro fino a far l' angolo EMI $= 0$ e cade perciò sulla stessa ME.

2 Per l' opposto si ha la minima MN ($= a - b$) quando
EN ($= b$) gira in dentro facendo un angolo MEN $= x$
$= 0$ e cade perciò sopra EM ($= a$); allora la forza MI
gira in fuori fino a far l' angolo EMI $= 180°$ e forma perciò una sola retta con EM. Cosicchè nel caso del massimo operando le forze F, f nel senso e nella direzione medesima, la risultante è sempre $\Phi = F + f$: e nel caso del minimo operando le forze nella direzione stessa ma in senso contrario, la risultante è sempre $\Phi = F - f$.

102. Dunque in generale, finchè le forze F, f conserveranno una medesima direzione, la risultante sarà $\Phi = F \pm f$; e poichè la direzione medesima evidentemente conservasi non solo nella coincidenza, ma anche nell' equidistanza o parallelismo, le forze parallele F, f avranno
3 del pari per risultante $\Phi = F \pm f$. Ora quando ME, MI,
MN divengono parallele, si ha IV $=$ IK ed VG $=$ SQ
2 (L. 413); dunque essendo $F : f : \Phi :: IK : SQ : IG$ (97),
le forze parallele ci daranno $F : \pm f : \Phi :: IV : VG : IG ::$
3 $OV : VR : OR$ (L. 472).

103. Volendo pertanto ridurre ad una sola Φ le due date forze parallele F, f, condotta tra le lor direzioni una retta qualunque RO, si avrà $F : \Phi :: OV : OR$ (102), onde $OV = \frac{F \cdot OR}{\Phi} = \frac{F \cdot OR}{F \pm f}$, e la parallela ΦV che passa per il punto V, sarà la direzione della cercata risultante Φ. All' incontro volendo risolvere una data forza Φ in due forze a lei parallele, presa ad arbitrio FR parallela a ΦV per direzione d' una forza parimente arbitraria F, sarà $F : f :: VO : VR$ (102), $VO = \frac{F \cdot VR}{f} = \frac{F \cdot VR}{\pm \Phi \mp F}$, e la parallela fO che passa per il punto O, sarà la direzione dell' altra forza f.

104. Dunque se nel piano delle tre forze F, f, Φ coincidenti o parallele, si prenda un punto fisso qualunque A, e sulle direzioni di esse si conducano da A tre normali, il prodotto della risultante per la sua normale eguaglierà la somma o la differenza dei prodotti di ciascuna delle due forze per la sua normale respettiva. Infatti nelle forze coincidenti, che supponendosi riunite tutte in FR, hanno comune la normale AG, poichè $\Phi = F \pm f$ (102), sarà an-

che $\Phi . AG = F . AG \pm f . AG$; e nelle forze parallele, poichè $\Phi . AG = F . AG \pm f . AG$, e $\Phi . VG = \pm f . IG$ (102), sarà anche $\Phi (AG + VG) = F . AG \pm f (AG + IG)$, 3
cioè $\Phi . AV = F . AG \pm f . AI$.

105. Questa proprietà osservabile che si avvera nei casi estremi della massima e minima risultante, non può non avverarsi nei varj casi delle risultanti intermedie. Noi ne abbiamo prevenuta la dimostrazione (L. 586), e sappiamo 1°. che il triangolo descritto col vertice A sulla diagonale MN eguaglia la somma dei triangoli descritti col vertice
stesso sui lati ME, MI quando A è fuori dell'angolo EMI: 4
2°. che quando A è in quest' angolo, il triangolo sulla diagonale eguaglia la differenza dei triangoli sui lati: 3°. che quando il punto A è nella diagonale, i due triangoli sui lati sono eguali tra loro. Ora tutti questi triangoli si esprimono generalmente per $MN . \frac{AT}{2}$, $ME . \frac{AX}{2}$, $MI . \frac{AC}{2}$ (L. 514); dunque nei primi due casi $MN . AT = ME . AX \pm MI . AC$, e quindi (96) $\Phi . AT = F . AX \pm f . AC$; e nel terzo caso, quando A è in un punto T della risultante, ed $AT = 0$, sarà $f . AC = F . AX$. Il prodotto d' una forza Φ per la distanza AT della sua direzione MN da un punto fisso A o anche da una linea fissa o da un piano fisso, si chiama *momento* di questa forza, e il punto, la linea o il piano a cui si riferiscono i momenti, diconsi *centro*, *asse* e *piano dei momenti*.

106. Può dunque generalmente conchiudersi riguardo al centro o punto fisso dei momenti, che *se il centro* A, A′ *è fuori o dentro dell' angolo* EMI, *il momento di* Φ *eguaglia o la somma o la differenza dei momenti di* F, *f*. Ora immaginando il piano del parallelogrammo delle forze talmente attaccato al centro A, A′ che possa girar solamente intorno a lui, ben si vede che essendo A fuor dell' angolo EMI, le forze F, *f* applicate ai punti X, C, tendono a far girare per una medesima parte il piano col sistema di tutte le linee che vi si trovano, mentre essendo A′ dentro l' angolo EMI, le forze F, *f* applicate ai punti X′, C′, tendono a farlo girare in parti diverse: onde riducendo un sistema qualunque di forze alle due F, *f* (99), può dirsi con maggiore universalità che *il momento della risultante di un numero* n *di forze eguaglia la somma dei*

momenti di quelle che tendono a far girare il sistema per una parte, meno la somma dei momenti di quelle che tendono a farlo girar per un' altra.

107. Lo stesso si avvera riguardo all'asse dei momen-
5 ti, se le forze son parallele; poichè unite le direzioni del-
e le forze con una normale AIVG e condotto per un cen-
6 tro A dei momenti l' asse qualunque AO sopra cui si faccian cader le parallele IM, VN, GO, si avrà (L. 468) AG : AI : AV : : GO : IM : VN, ed $F \times AG : f \times AI : \Phi \times AV :: F \times GO : f \times IM : \Phi \times VN$; ma $F \times AG \pm f \times AI = \Phi \times AV$ (106); dunque anche $F \times GO \pm f \times IM = \Phi \times VN$. E dopo ciò facilmente può estendersi il teorema al caso di AG obliqua alle direzioni di F, f, Φ.

108. Infine la medesima proprietà può dimostrarsi anche riguardo al piano dei momenti, supposto sempre che le forze sieno parallele; poichè se le forze sono un numero n, si cercherà la risultante Φ delle due prime A, B (103), la risultante Φ' della terza C e di Φ, la risultante Φ'' della quarta D e di Φ' ec.; quindi si applicherà ad A, B, Φ, a C, Φ, Φ', a D, Φ', Φ'' ec. il passato raziocinio (107) e si avrà il teorema solito (106). Anzi potrebbe dimostrarsi che questo teorema ha luogo egualmente per delle forze anche non parallele, e anche non situate in un medesimo piano purchè ciascuna di esse fosse prima risoluta in tre altre respettivamente parallele a tre rette perpendicolari tra loro in un medesimo punto, il che non ha difficoltà: ma tanto basti sulla natura della prima formula.

109. II°. La seconda $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)} = MN = 0$ è manifestamente un minimo; e poichè non può essere $MN = 0$ se l'angolo $MEN = x$ non sia infinitesimo o nullo, nè tale diventa se EN non giri in dentro e cada sopra EM, è evidente 1°. che essendo $x = 0$, si avrà $\cos x = 1$ (L. 611): 2°. che cadendo EN sopra EM e perciò la forza parallela MI formando una sola retta con EM, l'azione delle due forze MI, ME sarà contraria. Dunque l'equazione $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)} = 0$ si cangia in $a^2 + b^2 - 2ab = 0$, il che dà $a - b = 0$ ovvero $a = b$, e le forze $ME = a = F$, $MI = b = f$ sono eguali nel tempo stesso ed opposte; cosicchè non producendo alcun moto perchè la loro risultante $MN = 0$, costituiscono ciò che si

chiama

chiama *equilibrio*; onde può dirsi che *quando la risultante di più forze è zero, esse sono in equilibrio*, e reciprocamente *quando si ha l' equilibrio tra più forze, la loro risultante dee essere zero*.

110. Quindi riguardando un solido D come un ammasso di molecule collegate e pesanti, o come un sistema di forze parallele che tendono a farlo scender verticalmente (42), la sua quiete indicherà che quelle forze son bilanciate dalla forza contraria del filo FD, e che la risultante di tutte insieme è zero; ma la forza FD sostiene un sol punto del solido D; dunque le forze parallele a cui FD si oppone, agiscono per mezzo della lor risultante in un sol punto; dunque questo punto può sostituirsi al solido stesso D o al sistema dei piccoli solidi onde D è composto, e si può chiamare il centro di tutte le molecule gravitanti ovvero il *centro di gravità* del sistema; cosicchè il centro di gravità è quel punto, sostenuto il quale, i corpi o molecule d' una parte fanno equilibrio ai corpi o molecule dell' altra, e in qualunque caso o situazione tutto il sistema riposa. 7

111. Sieno pertanto due solidi A, M uniti insieme nei loro particolari centri di gravità con la verga inflessibile AM, e sia L il centro di gravità del sistema; sarà dunque A . g la forza del corpo A, ed M . g quella del corpo M (44), e la risultante di queste forze passerà per L (110). Perciò preso L per punto fisso (104) si avrà $Ag \times AL = Mg \times ML$ (105), ovvero A : M : : ML : AL, cioè 1°. *due masse sono in ragione inversa delle lor distanze dal centro comune di gravità*, principio fondamentale dell' equilibrio di cui ci serviremo altrove: 2°. *il centro comune di gravità di due masse si ha dividendo in ragione inversa di queste masse la linea che unisce i loro particolari centri di gravità*, principio fondamentale del centro di gravità di cui daremo quì brevemente le formule più necessarie, supposto però che le masse dei corpi M, m sieno omogenee cioè d' una medesima densità; nel qual caso avendosi $D = d$ e d' altra parte (10) $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, sarà $\frac{M}{V} = \frac{m}{v}$ onde $M : m :: V : v$, e potranno sostituirsi alle masse i lor volumi o dimensioni geometriche.

FIG.

8 112. Vogliasi primieramente il centro di gravità d'una linea AVE di cui si ha l' equazione per mezzo delle coordinate AI, IE. Sia Ee un elemento di AVE e si avranno due masse o volumi AVE, Ee: il centro di gravità di Ee infinitesima può supporsi in E, e preso N per il centro cercato di AVE, sarà EN la retta che unisce i particolari centri E, N dei volumi AVE, Ee; onde se sia n il comun centro del sistema, si avrà AVE : Ee : : En : nN (111) ed nN sarà infinitesima come Ee. Condotte ad AB dai punti N, n, E la parallela NR ad AI e le normali NN′, nn', EI, e posta $AI = x$, $IE = y$, $AN' = z$, $N'N = IR = u$, $AVE = s$, $Ee = ds$, avremo $N'n' = Nh = dz$, $N'I = NR = x - z$, $hn = du$, $RE = y - u$, e quindi AVE (s) : Ee (ds) : : En [= EN (L. 197. 6°)] : Nn : : RN ($x - z$) : Nh (dz) : : RE ($y - u$) : hn (du); dunque $sdz = xds - zds$, ed $sdu = yds - uds$, ovvero $sdz + zds = xds$, ed $sdu + uds = yds$; onde integrando, $sz = \int xds$ ed $su = \int yds$. Dunque infine $z = AN' = \frac{\int xds}{s}$ ed $u = N'N = \frac{\int yds}{s}$, formule che determinano il cercato centro N di gravità e nelle quali, come nelle seguenti, non ha luogo la Costante, perchè tutte svaniscono se sia $x = o$.

Onde avendosi $N'N = \frac{\int yds}{s}$, sarà anche $2\pi N'N = \frac{2\pi\int yds}{s}$, ovvero $2\pi\int yds = s \,.\, 2\pi N'N$: ma $2\pi\int yds$ esprime la superficie curva d' un solido di rivoluzione (L. 956); dunque *se quante linee si voglia rette o curve* AEB, AEL, *ec. situate da una stessa parte dell' asse* AB, *girino intorno ad* AB, *la superficie generata dalla rivoluzione eguaglia sempre la somma delle linee generatrici moltiplicata per la circonferenza descritta dal loro comun centro di gravità*.

113. Applicazioni. I. Sia AVE la linea retta AI; dunque $u = o$, $s = x$, e $z = AN' = \frac{\int xdx}{x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = \frac{AI}{2}$, cioè il centro di gravità è nel mezzo della retta AI. Onde il contorno di un poligono regolare ha il centro di

 FIG.

gravità nell' intersezion di due rette, che o da due angoli se i lati sono impari, o dal mezzo di due lati se i lati son pari, si conducano al mezzo dei lati opposti. 8

114. II. Sia AVE un arco di circolo dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$. Diviso in mezzo l' arco col raggio TV, è chiaro che essendo eguali e simili gli archi AV, VE, il loro comun centro di gravità, cioè il centro dell' arco AVE, dee essere in qualche punto N del raggio TV. Ora i triangoli rettangoli IEA, N'TN che hanno l' angolo E = T (L. 419) son simili, e perciò IA (x) : AE

$(\sqrt{2ax})$: : N'N $\left(\frac{\int yds}{s}\right)$: TN $= \frac{\sqrt{2ax}}{sx}\int yds$: ma $ds =$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (L. 861) $= \frac{adx}{y}$ (L. 862); dunque TN

$= \frac{\sqrt{2ax}}{sx}\int\frac{aydx}{y} = \frac{\sqrt{2ax}}{sx} \times ax = \frac{a\sqrt{2ax}}{s}$; dunque il centro

di gravità d' un arco di circolo è nel raggio che lo divide in mezzo, e la sua distanza TN dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l' arco s, il raggio a, e la corda $\sqrt{2ax}$.

115. Vogliasi in secondo luogo il centro di gravità d' una superficie piana AVEI delle cui coordinate si ha l' equazione. Sia Ie un elemento di AVEI e si avranno i due volumi AVEI, Ie: il centro di Ie infinitesima può supporsi in S nel mezzo di IE (113) e preso O per il centro cercato di AVEI, sarà SO la retta che unisce i particolari centri S, O; onde se sia t il comun centro del sistema, si avrà AVEI : Ie : : St : tO. Condotte come sopra (112), le ON', tn', OP e fatta AN' $= z$, N'n' $=$ Oq $= dz$, N'O $=$ IP $= u$, $qt = du$, AI $= x$, Ii $= dx$, IE $= y$, avremo

IN' $=$ PO $= x - z$, SI $= \frac{y}{2}$, PS $= \frac{y}{2} - u$, l' area AEI

$= \int ydx = s$, e l' elemento Ie $= ydx = ds$ (L. 946): sarà dunque AEI (s) : Ie (ds) : : St ($=$ SO) : Ot : : PO ($x - z$) :

Oq (dz) : : PS $\left(\frac{y}{2} - u\right)$: qt (du), e quindi pur come so-

pra (112), $z =$ AN' $= \frac{\int xds}{s} = \frac{\int xydx}{\int ydx}$, ed $u =$ N'O $=$

FIG.
8 $\frac{\int y ds}{2s} = \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$, formule che determinano il cercato centro O di gravità.

Onde avendosi $N'O = \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$, sarà $\pi \,.\, N'O = \frac{\pi \int y^2 dx}{2\int y dx}$ ovvero $2\pi N'O \int y dx = \pi \int y^2 dx$: ma $\pi \int y^2 dx$ esprime un solido di rivoluzione (L. 954); dunque *se quante figure si voglia, situate nello stesso piano e dalla parte stessa dell' asse* AB, *girino intorno ad* AB, *il solido generato eguaglierà la somma delle figure genitrici moltiplicate per la circonferenza, che è descritta dal loro comun centro di gravità.*

116. Applicazioni. I. Sia AVEI un triangolo; dunque sarà data la ragion de' suoi lati AI, IE, e si avrà, per esempio, AI (x) : IE (y) :: $m : n$ onde $y = \frac{nx}{m}$; dunque AN' $= \frac{\int nx^2 dx}{\int nx dx} = \frac{2nx^3}{3nx^2} = \frac{2x}{3}$, ed $N'O = \frac{\int n^2 x^2 dx}{2m\int nx dx} = \frac{n^2 x^3}{3mnx^2} = \frac{nx}{3m} = \frac{y}{3}$, cioè il centro cercato si determina prendendo $AN' = \frac{2}{3}$ AI e conducendo parallela ad IE la retta N'O $= \frac{1}{3}$ IE. Onde divisa in triangoli una figura qualunque rettilinea, il suo centro di gravità sarà il comun centro di tutti questi triangoli. Quello dei poligoni regolari coincide con quello del loro contorno (113); e se condotte da A, E due parallele ad IE, IA, si formasse un parallelogrammo, sarebbe y costante: onde $AN' = \frac{y\int x dx}{y\int dx} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$, ed $N'O = \frac{y^2 \int dx}{2y\int dx} = \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$, cioè il centro di gravità d' un parallelogrammo è nel mezzo di esso.

117. II. Sia AVEI una parabola dell' equazione $y^2 =$

 FIG. 8

px; dunque $dx = \frac{2ydy}{p}$ e perciò $AN' = \frac{\int 2y^4 dy}{p\int 2y^2 dy} = \frac{3y^2}{5p} = \frac{3x}{5}$, ed $N'O = \frac{\int 2y^3 dy}{2\int 2y^2 dy} = \frac{3y^4}{8y^3} = \frac{3y}{8}$, cioè il centro cercato si determina prendendo $AN' = \frac{3}{5}$ AI e conducendo parallela ad IE la retta $N'O = \frac{3}{8}$ IE.

118. Vogliasi in terzo luogo il centro di gravità d'una superficie. Quella d'un prisma lo ha visibilmente nel mezzo della linea retta che descrive il centro di gravità del contorno della base, mentre ella per formare il solido, sale parallelamente a se stessa (L. 545).

Sia dunque una superficie curva prodotta dalla rivoluzione della linea AVE intorno all'asse AI. È chiaro che il centro dee essere nell'asse AI (114). Sia Ee un elemento di AVE e si avranno due volumi, l'uno generato da AVE, l'altro da Ee; il centro di gravità della zona infinitesima prodotta da Ee può supporsi in I, e preso N' per centro della superficie nata da AVE, sarà IN' la retta che unisce i particolari centri I, N': onde se sia n' il comun centro del sistema, ritenute le denominazioni di sopra (115), avremo *superf.* AVE ($2\pi\int yds = u$): *superf.* Ee ($2\pi yds = du$) (L. 956) : : In' ($= IN' = x - z$): $n'N'$ (dz), e però $udz = xdu - zdu$ ovvero $udz + zdu = xdu$, ed integrando, $uz = \int xdu$ onde $z = AN' = \frac{\int xdu}{u} = \frac{\int xyds}{\int yds}$.

119. Applicazioni. I. Sia AVE una retta che generi la superficie curva del cono retto, e sia l'angolo IAE $= b$; dunque $IE = y = x \tang b$ (L. 647), $AE = s = \frac{x}{\cos b}$ (L. 648), e $ds = \frac{dx}{\cos b}$: onde $AN' = \frac{\int x^2 dx}{\int xdx} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2x}{3}$, cioè il centro cercato si determina prendendo $AN' = \frac{2}{3}$ AI.

FIG. 8

120. II. Sia AVE un arco di circolo che generi la superficie curva del segmento sferico; dunque $ds = \frac{adx}{y}$ (L. 862) ed $AN' = \frac{\int axdx}{\int adx} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}$, cioè il centro di gravità si determina prendendo $AN' = \frac{AI}{2}$.

121. Vogliasi infine il centro di gravità d'un solido. I prismi lo hanno manifestamente nel mezzo della linea retta che descrive il centro di gravità della base, mentre ella sale parallelamente a se stessa per formare il solido (L. 545.).

Sia dunque un solido prodotto dalla rivoluzione della superficie AVEI intorno all' asse AI. Supposto tutto come nel passato problema, sarà *solid.* AVE ($\pi\int y^2dx = u$) : *solid.* Ee ($\pi y^2dx = du$) (L. 954) : : $x - z : dz$, e però

$$z = AN' = \frac{\int xdu}{u} = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}.$$

122. Applicazioni. I. Sia AVEI un triangolo-rettangolo, onde il solido sia un cono retto; dunque $IE = y = x \, tang \, b$ come sopra, e però $AN' = \frac{\int x^3dx}{\int x^2dx} = \frac{3x^4}{4x^3} = \frac{3x}{4}$, cioè il centro si determina prendendo $AN' = \frac{3}{4} AI$.

Onde nei coni obliqui e nei solidi piramidali qualunque, condotta AI dal vertice A al centro I di gravità della base, passerà AI per tutti i centri di gravità delle infinite sezioni del solido, parallele e simili alla base, ed il comun centro di gravità di tutte, cioè del solido stesso, sarà parimente ai tre quarti della distanza AI, contati dal vertice A: e poichè i poliedri si dividono in piramidi (L. 563) anche il loro centro di gravità si troverà facilmente, almeno per approssimazione.

123. II. Sia AVEI un semisegmento di circolo onde il solido sia un segmento sferico; dunque $y^2 = 2ax - x^2$, ed

$$AN' = \frac{\int (2ax^2dx - x^3dx)}{\int (2axdx - x^2dx)} = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x},$$

124. Considerando ora le masse gravitanti dei corpi come forze, e il comun centro di gravità di quelle come la risultante di queste, potrebbe applicarsi quì tutta la dottrina dei momenti già spiegata di sopra (108 ec.); ma eccone la dimostrazione per i suoi proprj principj.

I°. Per C comun centro di gravità di due corpi M, *m* passi il piano PQ a cui si conducano le normali AQ, BP; 9
si avrà dunque (L. 433. 468) QA : BP :: AC : BC :: *m* : M (111); dunque M . QA = *m* . BP.

II°. Sia P′Q′ un piano fuori del centro C e di là dai corpi M, *m*, e condotte ad esso le normali AQ′, BP′, si immagini per C il piano PQ parallelo a P′Q′, e si prolunghi P′B in P; si avrà dunque QQ′ = CR = PP′, e perciò M . QQ′ + *m* . PP′ = (M + *m*) CR: ma QQ′ = Q′A — QA, PP′ = P′B + PB; dunque M . Q′A — M . QA + *m* × P′B + *m* . PB = (M + *m*) CR: ma M . QA = *m* . PB (124); dunque M . Q′A + *m* . P′B = (M + *m*) CR.

III°. Sia P″Q″ un piano fuori del centro C e tra i corpi M, *m*. Ripetuta la costruzione passata, si avrà QQ″ = CS = PP″, onde M . QQ″ + *m* . PP″ = (M + *m*) CS: ma QQ″ = QA — Q″A, PP″ = P″B — PB, ed M . QA = *m* × PB (124); dunque *m* . P″B — M . Q″A = (M + *m*) CS.

125. Dunque se in qualsivoglia figura o solido geometrico si conduca comunque per il suo centro C di gravità un asse o un piano PQ (suol chiamarsi l'*asse* o il *piano di equilibrio*), i due segmenti S, *s* in cui resta divisa la figura o il solido, si equilibreranno tra loro: poichè trovati nei segmenti S, *s* i loro particolari centri M, *m* di gravità, i quali necessariamente saranno in retta linea con C, si è visto che i momenti di M, *m* e perciò anche quelli dei segmenti S, *s* si eguaglieranno (124. I.).

126. Possono estendersi questi teoremi ad un numero qualunque di corpi. Sia C il comun centro di gravità dei tre corpi M, *m*, *μ* (supposto K quello dei primi due) 10
e si concepiscano i soliti piani LN, L′N′, L″N″ con le respettive normali come sopra, e con l'altre quattro KV, TF, T′F, T″F: ciò fatto

I°. Se LN passi per C, si avrà M . ND + *m* . LE = (M + *m*) VK (125): ma il peso M + *m* = K (110), onde M + *m* : *μ* :: CF : CK (111) :: TF : VK (L. 468) ed (M + *m*) VK = *μ* . TF; dunque M . ND + *m* . LE = *μ* × TF.

10 II°. Se L'N' sia fuori del centro C e di là dai corpi M, m, μ, si avrà $M . NN' + m . LL' + \mu . TT' = (M + m + \mu) CR$; ma $NN' = N'D - ND$, $LL' = L'E - LE$, $TT' = T'F + TF$; dunque $M . N'D - M . ND + m \times L'E - m . LE + \mu . T'F + \mu . TF = (M + m + \mu) CR$: ma $M . ND + m . LE = \mu . TF$ (126. I.); dunque $M . N'D + m . L'E + \mu . T'F = (M + m + \mu) CR$.

III°. Se L''N'' sia tra il centro e i corpi, si avrà $M \times NN'' + m . LL'' + \mu . TT'' = (M + m + \mu) CS$: ma $NN'' = N''D - ND$, $LL'' = L''E - LE$, $TT'' = TF - T''F$ ed $M . ND + m . LE = \mu . TF$ (126. I.); dunque $M . N''D + m . L''E - \mu . T''F = (M + m + \mu) CS$; ec.

127. Dal detto fin quì si può dedurre 1°. che se un sistema (comunque composto di corpi liberi o legati tra loro) sia messo in movimento da più forze eguali, parallele e dirette nel modo stesso, anche il comun centro di gravità per cui passa la risultante di tutte le forze (110), si moverà parallelamente ad esso e con egual celerità e direzione: 2°. che se in un sistema di corpi tra loro uniti, il comun centro di gravità sia urtato da una o più forze, tutti i corpi si moveranno in direzioni parallele alla sua, e con una celerità comune che si avrà dividendo per la total massa del sistema la quantità di moto impressa nel centro (21).

128. Anzi quando pure i corpi M, m, μ ec. si movessero uniformemente per le parallele DN', EL', FT' ec., ma con diverse celerità K, K', K'' ec., il comun centro C di gravità non lascierebbe di andar per la parallela CR con un movimento uniforme e con una quantità di moto eguale alla somma di tutti i moti parziali; Infatti

I. Se più piani passino per la parallela CR, i momenti dei corpi M, m, μ ec. riferiti a questi piani, saranno gli stessi in ciascun punto del moto, attesa l' equidistanza di questi punti da CR: ora in C la somma dei momenti è zero (126. I.); dunque sarà zero in ciascun punto del moto; dunque il centro di gravità si trova sempre in qualunque dei piani che passano per CR; dunque è nella comune intersezione CR di tutti;

II. Nel principio del moto si ha $(M + m + \mu) CR = M . N'D + m . L'E + \mu . T'F$ (126. II.), e quando i corpi dopo un tempo t hanno trascorsi degli spazj $DN = Kt$, $EL = K't$, $FQ = K''t$ e il centro C è giunto da C in S, si ha

 FIG.

si ha $(M + m + \mu)\,SR = M\,.\,N'N + m\,.\,L'L + \mu\,.\,T'Q$; 10
dunque sottratta questa dalla prima equazione e poi riducendo e sostituendo, verrà $CS = \frac{(MK + mK' + \mu K'')\,t}{M + m + \mu}$: ma $MK + mK' + \mu K''$ esprime la forza o moto di tutti i corpi (19), e perciò $\frac{MK + mK' + \mu K''}{M + m + \mu}$ è la celerità del centro C (21); dunque poichè lo spazio CS da lui trascorso, ne eguaglia la celerità nel tempo t, il moto di C è necessariamente uniforme (27).

III. La celerità del centro C è $\frac{MK + mK' + \mu K''}{M + m + \mu}$; dunque il suo moto sarà (19) $\frac{(MK + mK' + \mu K'')(M + m + \mu)}{M + m + \mu} = MK + mK' + \mu K''$, cioè eguaglierà la somma dei moti di tutti i corpi. Bisogna però sempre sottrarre al solito (106) quei movimenti che si fanno in senso contrario agli altri, ciò che talvolta può rendere immobile il centro C benchè il sistema si muova.

129. Infine se i corpi liberi d' un sistema fossero mossi con direzioni oblique qualunque, si risolverebbe ciascuna forza in tre altre respettivamente parallele a tre rette perpendicolari tra loro (108), e i tre moti paralleli a queste tre rette si sostituirebbero al moto di ciascun corpo: allora il centro di gravità si moverebbe come se tutte le potenze parallele alle tre rette gli fossero immediatamente applicate (128. III.); onde componendo i tre movimenti, si avrebbe il suo movimento e la sua via. Potrebbe dimostrarsi lo stesso nel caso ancora che i corpi del sistema fossero uniti tra loro: ma basti averlo accennato.

Moto per le Trajettorie.

130. Fin quì considerammo due forze omogenee. Sieno ora le due forze eterogenee F, f che agiscano con le 11
direzioni ME, MI sul corpo M; dunque non avrà più luogo nè la costruzione di sopra (95) nè l' analogia NI:IM::KR:RM che se ne dedusse; dunque i punti M, K, L, N non son più in linea retta, e perciò il corpo M descrive

11 una curva MKLN che dicesi *Trajettoria*, la cui natura e determinazione dipende dalla legge con cui agiscono le due forze combinate.

Di queste due forze l'una F suol supporsi momentanea e l'altra f continuata, sia ella costante o sia variabile. La prima F si chiama *projettile* o *tangenziale* perchè la sua direzione è sempre per la tangente della curva (14); la seconda f si chiama *centrale* perchè si riporta ad un punto fisso o centro C per avvicinarvi o per allontanarne il corpo: se tende ad avvicinarlo è *centripeta*, se ad allontanarlo è *centrifuga*. Alcuni chiamano generalmente centrali le due forze F, f e ciò può farsi purchè la tangenziale non si confonda con la centrifuga che ne differisce come la parte dal tutto, nè si prendano quasi una cosa stessa la centrifuga e la centripeta, le quali oltre che agiscono oppostamente, come si è detto, sono anche diverse in quantità, e solamente nel circolo si eguagliano come vedremo. Le rette CM, CL che dal centro o *fuoco* C vanno a qualche punto della trajettoria, diconsi *raggi vettori*.

131. Quì però si osservi che l'idea completa delle trajettorie non comprende già le sole curve, ma abbraccia anche la linea retta. Poichè se la forza momentanea F spinga il corpo per ME, o sia ME un piano materiale e parallelo all'orizzonte, l'azione della forza centrale interamente impedita diverrà nulla, e la trajettoria si ridurrà alla retta orizzontale ME: se il corpo M sia colpito dalla forza momentanea nella direzione MC della forza centrale, o se mancando l'impulso della prima, sia egli animato solamente dalla seconda, è chiaro che la trajettoria si ridurrà al raggio vettore MC. Di queste due trajettorie abbiamo già sott'altro aspetto bastantemente parlato, giacchè insomma sono esse le linee che con moto uniforme ed uniformemente accelerato, vengon descritte dal mobile: ma se il piano materiale ME si inclini all'orizzonte e scenda in MN, qual trajettoria descriverà il corpo M spinto dalla forza momentanea per la direzione medesima di MN? È chiaro che sarà la stessa MN; ella ha però delle proprietà notabili, e da questo caso più semplice comincieremo a considerar le trajettorie.

8 132. Sia il piano inclinato ABD la cui lunghezza AD $= \lambda$, l'altezza AB $= a$, e scenda sopra di lui un mobile

FIG. 8

che abbia il centro di gravità in C. Condotta per C la verticale CG rappresentante la solita forza g di gravità (44), e risolutala nelle due forze Cp normale e CH parallela ad AD (99), è manifesto che Cp (suppongo che Cp passi per la base o *effettiva* o *virtuale* del mobile) premendo il piano AD ed essendo impedita da lui, non contribuisce alla discesa del mobile C, che perciò scenderà con la sola forza CH $= \gamma$, che chiamasi la *forza relativa di gravità*. Dunque $g : \gamma :: \text{CG} : \text{CH}$, e poichè i triangoli simili ABD, CHG (L. 433. 414) danno $\text{CG} : \text{CH} :: \text{DA} : \text{AB} :: \lambda : a$, avremo $g : \gamma : \lambda : a$, e $\gamma = \frac{ag}{\lambda}$, espressione in cui tutto è costante (43); dunque lo sarà anche γ, e però il mobile C scorrerà per il piano inclinato AD con moto uniformemente accelerato all' ingiù o ritardato all' insù (8).

133. Poichè $\gamma = \frac{ag}{\lambda}$, se nelle quattro primitive equazioni (44. 72) del moto uniformemente accelerato e ritardato (la quinta diviene inutile perchè si ha da essa con più date ciò che dall' altre si ha con meno) pongasi x, θ, λ, $\frac{ag}{\lambda}$ in luogo di c, t, s, g, si avranno otto equazioni con le quali può formarsi al solito la doppia seguente

T A V O L A I.

Per il moto uniformemente accelerato nei Piani inclinati.

	Date	si ha	Formule
134.	$\varkappa, g, p$		$a = \frac{\varkappa^2 - p^2}{2g}$
135.	$\varkappa, g, \lambda, \theta$	a	$a = \frac{2\lambda}{g\theta}\left(\varkappa - \frac{\lambda}{\theta}\right)$ *
136.	g, λ, p, θ		$a = \frac{2\lambda}{g\theta}\left(\frac{\lambda}{\theta} - p\right)$
137.	a, g, p		$\varkappa = \sqrt{(2ag + p^2)}$
138.	a, g, λ, θ	$\varkappa$	$\varkappa = \frac{ag\theta}{2\lambda} + \frac{\lambda}{\theta}$ *
139.	λ, p, θ		$\varkappa = \frac{2\lambda}{\theta} - p$
140.	$a, \varkappa, p$		$g = \frac{\varkappa^2 - p^2}{2a}$
141.	$a, \varkappa, \lambda, \theta$	g	$g = \frac{2\lambda}{a\theta}\left(\varkappa - \frac{\lambda}{\theta}\right)$ *
142.	a, λ, p, θ		$g = \frac{2\lambda}{a\theta}\left(\frac{\lambda}{\theta} - p\right)$
143.	$a, \varkappa, g, \theta$		$\lambda = \frac{\theta[\varkappa + \sqrt{(\varkappa^2 - 2ag)}]}{2}$ *
144.	a, g, p, θ	λ	$\lambda = \frac{\theta[p + \sqrt{(2ag + p^2)}]}{2}$
145.	$\varkappa, p, \theta$		$\lambda = \frac{\theta(\varkappa + p)}{2}$
146.	$a, \varkappa, g$		$p = \sqrt{(\varkappa^2 - 2ag)}$ *
147.	a, g, λ, θ	p	$p = \frac{\lambda}{\theta} - \frac{ag\theta}{2\lambda}$ *
148.	$\varkappa, \lambda, \theta$		$p = \frac{2\lambda}{\theta} - \varkappa$ *
149.	$a, \varkappa, g, \lambda$		$\theta = \frac{\lambda[\varkappa + \sqrt{(\varkappa^2 - 2ag)}]}{ag}$ *
150.	a, g, λ, p	θ	$\theta = \frac{\lambda[-p + \sqrt{(2ag + p^2)}]}{ag}$
151.	$\varkappa, \lambda, p$		$\theta = \frac{2\lambda}{\varkappa + p}$

TAVOLA II.

Per il moto uniformemente ritardato nei Piani inclinati.

	Date	Si ha	Formule
152.	χ, p, g	a	$a = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$
153.	χ, g, λ, τ		$a = \frac{2\lambda}{g\tau}\left(\frac{\lambda}{\tau} - \chi\right)$
154.	g, λ, p, τ		$a = \frac{2\lambda}{g\tau}\left(p - \frac{\lambda}{\tau}\right)$
155	a, g, p	χ	$\chi = \sqrt{(p^2 - 2ag)}$
156.	a, g, λ, τ		$\chi = \frac{\lambda}{\tau} - \frac{ag\tau}{2\lambda}$
157.	λ, p, τ		$\chi = \frac{2\lambda}{\tau} - p$
158.	a, χ, p	g	$g = \frac{p^2 - \chi^2}{2a}$
159.	a, χ, λ, τ		$g = \frac{2\lambda}{a\tau}\left(\frac{\lambda}{\tau} - \chi\right)$
160.	a, λ, p, τ		$g = \frac{2\lambda}{a\tau}\left(p - \frac{\lambda}{\tau}\right)$
161.	a, χ, g, τ	λ	$\lambda = \frac{\tau[\chi + \sqrt{(\chi^2 + 2ag)}]}{2}$
162.	a, g, p, τ		$\lambda = \frac{\tau[p + \sqrt{(p^2 - 2ag)}]}{2}$
163.	χ, p, τ		$\lambda = \frac{\tau}{2}(\chi + p)$
164.	a, χ, g	p	$p = \sqrt{(2ag + \chi^2)}$
165.	a, g, λ, τ		$p = \frac{ag\tau}{2\lambda} + \frac{\lambda}{\tau}$
166.	χ, λ, τ		$p = \frac{2\lambda}{\tau} - \chi$
167.	a, χ, g, λ	τ	$\tau = \frac{\lambda[-\chi + \sqrt{(2ag + \chi^2)}]}{ag}$
168.	a, g, λ, p		$\tau = \frac{\lambda[p + \sqrt{(p^2 - 2ag)}]}{ag}$
169.	χ, λ, p		$\tau = \frac{2\lambda}{\chi + p}$

È superfluo l' avvertire che con queste Tavole si troveranno nel moto per i piani inclinati tutte le proprietà già osservate nell' uniformemente accelerato e ritardato (65... 93): solo diremo che esse fanno conoscere tutte le relazioni tra i moti per due piani diversi. Se per esempio, si vogliano le celerità di due mobili che sono scesi liberamente per due diversi piani inclinati, sarà $p = 0$, ed essendo data la sola diversa inclinazione dei piani o la loro altezza, avremo (137) $x : x' :: \sqrt{2ag} : \sqrt{2a'g} :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$, cioè le celerità finali sono come le radici dell' altezze dei piani ec. Ma ecco delle Applicazioni più interessanti.

8 170. I. Trovar la ragione delle celerità che acquisterebbe un mobile trascorrendo AB ed AD. Si avrà dunque in D la celerità $x = \sqrt{2ag}$ (137): ma in B si ha la celerità $c = \sqrt{2gs}$ (45), perchè in avvenire suppongo sempre $p = 0$ nella I. Tavola; dunque $x : c :: \sqrt{a} : \sqrt{s}$: ma quì $s = a$ giacchè lo spazio verticale AB è l' altezza stessa del piano; dunque $\sqrt{a} = \sqrt{s}$ e però $c = x$, cioè il mobile ha la stessa celerità in D ed in B.

7 171. D' onde segue 1°. che se il mobile scenda per una curva ABCD cioè per una serie infinita di piani infinitesimi ed infinitamente inclinati AB, BC ec., la sua celerità nei punti B, C, D sarà eguale alla celerità che avrebbe nei punti I, K, D dopo aver trascorse l' altezze verticali LI, LK, LD. Infatti descritto col raggio DC l' arco infinitesimo CG, e condotta la normale CH $=$ *sen* CDH $= sen \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, la forza DC sarà risoluta nelle due DK DH, delle quali la DK si perde tutta nel percuotere il piano HE, e resta al mobile la sola DH: onde poichè CD $=$ DG e DG $-$ DH $=$ HG, la forza perduta in D sarà HG.

Ora (L. 477) $GD + DH : HC \left(\frac{1}{\infty}\right) :: HC \left(\frac{1}{\infty}\right) : HG = \frac{1}{\infty^2 (GD + DH)}$; dunque perdendosi un infinito numero di forze HG nella scesa per gli infiniti piani AB, BC ec., la forza totale perduta lungo la curva, sarà $\infty HG = \frac{\infty}{\infty^2 (GD + DH)} = \frac{1}{\infty (GD + DH)} = 0$ (L. 197. 1°), cioè la perdita sarà nulla, e il corpo avrà in B la forza o celerità stessa che avrebbe dopo aver trascorsa LI, in C la

 FIG.

stessa che acquisterebbe per LK, in D la stessa che avrebbe dopo essere sceso per LD (170). 7.

172. Dunque 2°. come in virtù della celerità finale, il corpo sceso per LD risalirebbe in egual tempo al punto L (93); così se dopo avere scorso l' arco ABCD, incontri in D il concavo della stessa o d' un'altra curva qualunque, si inalzerà per essa in egual tempo fino al punto M, cioè ad una altezza eguale a quella da cui partì. Onde un *pendolo semplice*, o un filo inflessibile e molto leggiero FD con un peso D nella sua estremità assai grave e poco voluminoso, movendosi liberamente intorno al punto fisso F, giunto che sia da A in D per l' arco ABCD, salirà in egual tempo per un arco egualmente alto DM, e da M tornerà nuovamente in A: cosicchè, tolti gli ostacoli, le sue *oscillazioni* ADM, MDA durerebbero perpetuamente.

173. II. Data l'altezza AB d' un piano inclinato ABD, trovar nella sua lunghezza AD il punto E tale, che un mobile partendosi da A, trascorra in tempo guale l' inclinata AE e la verticale AB. Condotta EI parallela alla base BD, sia AE $= x$, AD $= \lambda$, AB $= a = s$, spazio trascorso dal mobile verticalmente cadente; e poichè DA : AE : : BA : AI (L. 467), sarà AI $= \frac{sx}{\lambda}$. Avendosi dunque nel piccolo piano inclinato AIE la lunghezza AE $= \lambda' = x$, e l' altezza AI $= a' = \frac{sx}{\lambda}$, il tempo impiegato nel trascorrere AE sarà (150) $\theta' = \lambda' \sqrt{\frac{2}{a'g}} = x \sqrt{\frac{2}{\frac{gsx}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2\lambda x}{gs}}$: ma il tempo impiegato per AB è $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (64) e per ipotesi dee esser $\theta' = t$; dunque $\sqrt{\frac{2\lambda x}{gs}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ ed $x = \frac{s^2}{\lambda}$: onde alzata BE normale ad AD, sarà E il punto cercato, perchè DA : AB : : AB : AE (L. 473), cioè $\lambda : s : : s : x =$ AE.

174. Dunque se sull' altezza AB di due o più piani inclinati AD, AK si descriva un circolo, il mobile trascorrerà il diametro AB nel tempo stesso in cui trascorrerebbe qualunque delle corde AE, AL, ec., perchè BE, BL ec. son normali ai piani (L. 419): onde anche le

corde AE, AL, BE, BL ec. saranno trascorse in tempi eguali.

175. Parrebbe potersi inferir di quì che l' oscillazioni d' un pendolo semplice che descrive dei piccoli archi di 4° o di 5°, sono sensibilmente *isocrone* o di egual durata, giacchè il moto per le corde è isocrono e le corde molto piccole si confondono sensibilmente coi loro archi: ma questa confusione di corde e di archi che ha luogo in Geometrìa ove si parla di lunghezze, non lo ha certamente in Meccanica ove si tratti di tempi; e si prova anzi che il moto è più tardo per la corda AD che per l'arco ABCD;
7. onde l' *isocronismo* delle piccole oscillazioni MDA, NDO si dimostrerà così. Preso A per principio della discesa, sia DL $= m$, DF $= r$, e supposti gli archi BD, CD infinitamente vicini, sia DI $= x$, IK $= -dx$ (L. 821), l'arco AB $= s$ e BC $= ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{-rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ (L. 862) $= \frac{-rdx}{\sqrt{2rx}}$, giacchè per ipotesi DL e perciò anche DI son piccolissime. Dunque (45) il pendolo in B avrà la celerità $c = \sqrt{2g(m - x)}$ che acquista (171) scendendo per LI $= m - x$, e quindi $dt = \frac{ds}{c}$ (35) $= \frac{-dx}{\sqrt{(mx - x^2)}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$; onde integrando, fatto $x = \frac{m}{2}(z + 1)$ (L. 850. 2°), $t = arc.cos\left(\frac{2x}{m} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ senza Costante, perchè quando $t = 0$, anche $arc. = 0$. Volendo dunque il tempo d' una semioscillazione AD, si farà $x = 0$, e verrà $t = 180°. \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ (L. 611) $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ (520), onde il tempo d' un'oscillazione sarà $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, espressione che non contenendo m, vale per tutti i piccoli archi circolari. Dunque 1°. *le piccole oscillazioni nel circolo sono isocrone:* 2°. poichè i tempi per l' arco AOD e per il diametro verticale 2FD, e per la corda AD (174) sono $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, $T = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ (64), e $\frac{\pi}{2} < 2$;

 FIG.

e $\frac{\pi}{2} < 2$, *l' Arco* AOD *è trascorso in minor tempo che la* 7
sua corda AD .

176. Del resto il solo pendolo oscillante tra due lamine cicloidali ha isocrone tutte le sue o grandi o piccole vibrazioni; poichè in tal caso egli descrive una cicloide (874), in cui ritenute le denominazioni di sopra (175), e presa $\frac{DF}{2} = \frac{r}{2}$ per diametro del circolo genitore, si avranno (L.951.V.) gli archi DOA $= \sqrt{2rm}$, DOB $= \sqrt{2rx}$, e l'arco AB $= s = \sqrt{2rm} - \sqrt{2rx}$, onde BC $= ds = \frac{-rdx}{\sqrt{2rx}}$, quantità che si ha quì esattamente, mentre di sopra (175) si ottenne solo per approssimazione. Ripetuto pertanto il raziocinio medesimo, verrà $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ per il tempo comune a tutte le oscillazioni o grandi o piccole della cicloide.

Questa curva oltre essere *Isocrona* o *Tautocrona* è anche *Brachistocrona*, cioè di quante linee posson condursi tra due punti di un piano verticale, ella è trascorsa nel brevissimo o minimo tempo possibile: infatti posto LI ($= m - x$) $= y$, sarà $dt = \frac{ds}{c} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ (175), e il tempo $t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{ds}{\sqrt{y}}$ dovrà essere un *Minimo*; ora si sa (L. 1009. III.) che ciò si avvera nella cicloide.

Per altro la difficoltà di conservare uniforme la curvatura delle due lamine metalliche rammentate di sopra, le quali si contraggono al freddo o si dilatano al caldo, ha fatta abbandonar questa curva e ha dato luogo ad una terza specie di pendoli. I loro archi dopo l'introduzione di quel meccanismo ingegnoso che gli Orologiaj chiamano *scappamento libero*, vanno da 7° fino a 12° e anche a 20°, nè per questo è sensibilmente turbato l'isocronismo: 1°. perchè sospendendosi ora la verga FD col mezzo di due molle, il punto D descrive degli archi assai più prossimi ai cicloidali che ai circolari: 2°. perchè le forze acquistate al termine delle semiocillazioni AD, BD, CD, mi-

FIG. surandosi dai seni-versi LD, ID, KD (171), ed in caso d' i-
7 socronismo essendo le forze motrici come gli spazj trascorsi o le semioscillazioni medesime (94), quanto queste saranno più piccole, tanto sarà più piccolo il seno-verso o la forza acquistata, onde gli ostacoli che rendono irregolare il moto del pendolo, restando sensibilmente gli stessi e nelle grandi e nelle piccole oscillazioni, è chiaro che queste assai men forti di quelle, ne risentiranno in pratica una più grande alterazione: di modo che se le piccole oscillazioni si riguardano per isocrone quantunque assai alterate dagli ostacoli dell' attrito e dell' aria, potranno riguardarsi per tali anche le grandi, che con la lor forza maggiore distruggono quasi interamente l' effetto di quegli ostacoli.

177. III. Trovar la ragione dei tempi che impiegherebbe un mobile trascorrendo la lunghezza AD e l' altez-
8 za AB. È evidente che in D si ha il tempo $\theta = \lambda \sqrt{\frac{2}{ag}}$ (150): ma in B si ha $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (64) e quì $s = a$; dunque $\theta : t :: \lambda \sqrt{\frac{2}{ag}} : \sqrt{\frac{2a}{g}} :: \lambda : a$.

178. Onde se due piani ABD, GMD sieno egualmente inclinati, i tempi spesi per AD, GD saranno come le radici dell' altezze AB, GM o delle lunghezze AD, GD; poichè posta $GD = \lambda'$, $GM = a'$ e chiamato θ' il tempo per GD, t' quello per GM, sarà $\theta' : t' :: \lambda' : a'$ (177): ma l' eguale inclinazione dei piani dà $\lambda : a :: \lambda' : a' :: \theta : t$; dunque $t : t' :: \theta : \theta'$: ma $t : t' :: \sqrt{\frac{2a}{g}} : \sqrt{\frac{2a'}{g}} :: \sqrt{a} : \sqrt{a'} :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'}$; dunque anche $\theta : \theta' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'} :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'} :: \sqrt{AB} : \sqrt{GM} :: \sqrt{AD} : \sqrt{GD}$.

179. Dunque 1°. anche *i tempi* t, t′ *delle piccole o-*
7 *scillazioni* NDO, M′ΔX *di due pendoli semplici, sono come le radici delle lunghezze* $FD = \lambda$, $F\Delta = \lambda'$ *dei pendoli*. Infatti (175) si ha $t = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ e $t' = \pi \sqrt{\frac{\lambda'}{g}}$, onde $t : t' :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'}$. Si vede però che se i due pendoli fossero in diverse Latitudini e perciò obbedissero a gravità g, g' diverse, sarebbbe $t : t' :: \sqrt{\frac{\lambda}{g}} : \sqrt{\frac{\lambda'}{g'}}$; e se un pendolo stesso si portasse in diverse Latitudini, verrebbe $t : t' :: \sqrt{g'} : \sqrt{g}$.

180. Dunque 2°. *le lunghezze* λ, λ' *dei pendoli son reciprocamente come i quadrati dei numeri* n, n' *dell' oscillazioni fatte in un dato egual tempo* T. Poichè i tempi t, t' eguagliando il tempo T diviso per i numeri n, n' dell' oscillazioni (L. 32. 2°), cioè avendosi $t = \frac{T}{n}$, e $t' = \frac{T}{n'}$, sarà $t : t' :: \frac{T}{n} : \frac{T}{n'} :: n' : n :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'}$ (179), e quindi $\lambda : \lambda' :: n'^2 : n^2$.

181. Dunque 3°. data la lunghezza d'un pendolo e il tempo d' una sua oscillazione, si conoscerà facilmente il tempo d' un' oscillazione d' un altro pendolo la cui lunghezza sia data, o si avrà la sua lunghezza se sia dato il tempo d' una sua oscillazione. Tra noi un pendolo semplice di *piedi* 3, *poll.* 0, *lin.* 8, 38 batte i secondi: onde se nell' equazione $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ (175) sia $t = 1''$, $\pi = 3,14159265$, $\pi^2 = 9,869604$, $r = 440,38$ *linee*, verrà $g = 30,183$ *piedi* (68), e lo spazio $\frac{g}{2}$ liberamente descritto in $1''$ da un corpo cadente (68), sarà di 15, 0915 *piedi*, come si sapeva per esperienza (41).

182. Il *pendolo composto*, quello cioè da cui pendono due o più pesi immobili μ, μ' come in M, M', segue con qualche modificazione le stesse leggi. In fatti se FM, FM' fossero due pendoli semplici, è chiaro che l' oscillazioni di μ in M sarebbero più lente dell' oscillazioni di μ' in M' (179): ma attenendosi μ, μ' ad una stessa verga inflessibile FM, nè potendo ella nel tempo medesimo oscillare e più tardamente per obbedire a μ, e più prontamente per obbedire a μ', è del pari evidente che il tempo delle sue oscillazioni sarà la risultante dei tempi dell' oscillazioni di μ, μ' separati; e poichè questi tempi sono espressi da $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$ (179), il tempo risultante dovrà esprimersi con una $\sqrt{F\Pi}$ media tra $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$, e il pendolo semplice FΠ sarà isocrono al dato pendolo composto; cosicchè per conoscere il tempo dell' oscillazioni di questo, basterà determinar la lunghezza FΠ di quello, cioè il *centro* Π *d' oscillazione* del pendolo composto. Si osservi dunque che come il tempo $\sqrt{F\Pi}$ è la risultante dei tempi $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$, così l' oscillazione ΠL dee esser la risultante dell' oscillazioni separate MD, M'Δ, e quindi an- 7

7 che la forza in Π per cui si fa l' oscillazione ΠL, è necessariamente la risultante delle forze in M , M' per cui si farebbero l' oscillazioni MD , M'Δ .

Ciò supposto, sia $F\Pi = x$, $FM = a$, $FM' = \pm b$ (il segno di sotto serve per il corpo μ' fissato al di là del punto di sospensione F), e si avrà $\Pi M = a - x$, $\Pi M' = \Pi F \mp FM' = x \mp b$; e poichè le forze in M , M' fanno in un tempo medesimo descrivere ai pesi μ, μ' gli archi MD, M'Δ o le loro proporzionali $FM = a$, $FM' = \pm b$ (L. 508), sarà μa la forza in M , e $\pm \mu' b$ la forza in M' (24): ma la risultante di queste due forze passa per Π come si è visto; dunque condotta per Π la $\Sigma\Sigma'$ normale alle forze parallele $M\Sigma$, $M'\Sigma'$ e preso Π per punto fisso (104), si avrà $\mu a \times \Pi\Sigma = \pm \mu' b \times \Pi\Sigma'$, onde $\mu a : \pm \mu' b :: \Pi\Sigma' : \Pi\Sigma :: \Pi M' : \Pi M :: x \mp b : a - x$; dunque $\mu a^2 - \mu a x = \pm \mu' b x - \mu' b^2$, e perciò $x = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b}$, cioè *la distanza del centro Π d' oscillazione dal punto F di sospensione in un pendolo composto qualunque* (poichè il raziocinio stesso si adatta ad un pendolo di tre pesi, di quattro ec. purchè riuniti tutti nella linea stessa FM che passa per F) *si ha dividendo per l' aggregato di tutte le forze coi loro segni ciascuna forza col suo segno, moltiplicata per la sua positiva o negativa distanza da* F .

La somma $\mu a^2 + \mu' b^2$ dei prodotti di ciascun corpo o molecula μ, μ' d' un sistema, per il quadrato a^2, b^2 della loro distanza dal punto F o da un asse dato, chiamasi dai Fisici *Momento d' Inerzia*. Da questo Momento derivano essi la *Teoria dei corpi rotanti* che non può quì aver luogo, e solo osserveremo che l' aria, come mezzo assai raro, poco alterando la gravità propria o specifica, e poco anche la gravità acceleratrice d' un pendolo che oscilla, la risultante delle forze gravitanti dei corpi μ, μ', cioè il centro d' oscillazione, non differirà sensibilmente dalla risultante delle forze rotanti dei corpi stessi, cioè dal *centro di percussione* o da quel punto Π con cui, se la verga FD aggirandosi intorno ad F percuotesse un corpo, gli imprimerebbe il massimo possibile movimento. Del resto questi due centri non sono una cosa stessa, come molti han creduto; e mentre nell' acqua il centro d' oscillazione non è più in Π ove era nell' aria, il centro di percussione col

cangiar di mezzo non cangia di luogo, e supposta costante la velocità dei corpi rotanti, resta anch' egli costantemente nel punto Π. 7

183. Se T sia il comun centro di gravità dei pesi μ, μ', posta $FT = z$, si avrà (111) $\mu : \mu' :: z \mp b : a - z$, onde $z = \frac{\mu a \pm \mu' b}{\mu + \mu'}$. Di quì si imparano quattro cose: 1°. che essendo $\frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b} = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\frac{(\mu + \mu')(\mu a \pm \mu' b)}{\mu + \mu'}}$, la distanza del centro d' oscillazione o di percussione dal punto F o da un asse dato, eguaglia il Momento d' Inerzia diviso per il prodotto delle masse nella distanza del loro centro di gravità dallo stesso asse o punto F: 2°. che il centro d' oscillazione o di percussione è diverso dal centro di gravità, e che questo è più vicino di quello al punto F di sospensione; perchè essendo $a^2 + b^2 > 2ab$, si avrà sempre $\frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b} > \frac{\mu a \pm \mu' b}{\mu + \mu'}$: 3°. che quanto più il centro di gravità T si accosta al punto di sospensione F, tanto più se ne discosta il centro Π d' oscillazione; perchè nel caso di $z = \frac{\mu a - \mu' b}{\mu + \mu'}$, se $\mu a = \mu' b$, sarà $z = FT = 0$ (L. 197. 3°) e il centro di gravità coinciderà col punto F di sospensione, mentre intanto l' equazione $x = F\Pi = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{0} = \infty$ (L. 197) ci fa vedere che la distanza del centro Π d' oscillazione o di percussione diviene infinita: 4°. che se le forze μa, $\pm \mu' b$ si considerino come due pesi P, P', si avrà $x = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b} = \frac{Pa \pm P'b}{P + P'} = z$, cioè il centro di gravità coincide col centro d' oscillazione o di percussione, che può conseguentemente determinarsi come il centro di gravità (112. ec.), se P, P' si valutino come forze. Così per esempio, se FO sia una verga pesante ed omogenea, di cui si voglia il centro d' oscillazione o di percussione, non dovrà farsi solamente $s = FO = x$ come sopra (113), ma bisognerà eguagliare s alla forza, moltiplicando il so-

7 lito peso o volume x per la distanza $OF = x$ (182), e ponendo $s = FO \times OF = x^2$; quindi si avrà $ds = 2xdx$, e la formula (112) darà $\frac{\int 2x^2 dx}{x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2x}{3} = \frac{2}{3}FO$, onde il centro d'oscillazione o di percussione sarà nei due terzi della data verga pesante FO ec. Ma torniamo ormai alle trajettorie.

12 184. Se la forza acceleratrice φ che unita alla momentanea (130) guida il corpo M per la trajettoria SMN, si risolva in due forze (99), l'una acceleratrice orizzontale $\varphi' = X$ che lo spingerebbe per MI parallela all'ascisse $SV = x$, l'altra acceleratrice verticale $\varphi'' = Y$ che lo spingerebbe per MH parallela all'ordinate $VM = y$, onde nel tempo dt trascorresse $Ma = dx$ in virtù della prima, ed $Ma' = dy$ in virtù della seconda; ben si sa che egli nel tempo stesso dt trascorrerà realmente la diagonale $Mb = ds$ (95), e che mentre le due forze gli imprimono le celerità $c' = \frac{dx}{dt}$ e $c'' = \frac{dy}{dt}$, la sua celerità effettiva sarà $c = \frac{ds}{dt}$ (35). Ora $\varphi' dt = dc'$ e $\varphi'' dt = dc''$ (36); dunque $Xdt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ed $Ydt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, equazioni generali che serviranno a scoprire le più importanti proprietà delle trajettorie.

185. I. Sia C il centro della forza, $CS = a$ la distanza ove il mobile ricevè in principio una nota celerità p di projezione, $CE = k$ la nota normale alla tangente SD (L. 644), $CM = z$ un raggio vettore, $MR = F$ la forza centripeta in M che risoluta nelle due MI, MO (99), dà MC $(z) : CV\ (a - x) :: MR\ (F) : RO = MI = \frac{F(a-x)}{z} = X$, e $CM\ (z) : MR\ (F) :: VM\ (y) : MO = \frac{Fy}{z} = -Y$ (perchè la forza verticale che si prese all'insù (184), è quì all'ingiù); dunque l'equazioni generali divengono $\frac{Fdt\,(a-x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ e $\frac{-Fydt}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, che moltiplicate la prima per y, la seconda per $a - x$, e poi sommate,

 FIG.

danno $o = y \times d\left(\frac{dx}{dt}\right) + (a - x) \times d\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Integrando quest' equazione, s' ottiene $\frac{ydx}{dt} + (a - x)\frac{dy}{dt} = Cost. =$ B, che or ora determineremo, ed aggiungendo $\frac{ydx}{dt}$ ai due 12
membri e nuovamente integrando, $\int ydx + \frac{(a-x)}{2} y = \frac{Bt}{2}$ senza costante, perchè nel principio del moto ove $x = o$, si ha $y = o$ e $t = o$: ma $\int ydx = $ SMV (L. 946) ed $\frac{(a-x)}{2} y = $ MVC (L. 515); dunque il settore CSM $= \frac{Bt}{2}$, e per la stessa ragione un altro settor qualunque CST $= \frac{B\tau}{2}$; dunque CST − CSM (= CMT) : CSM $:: \frac{B\tau - Bt}{2}$ [$= \frac{B}{2}(\tau - t) = \frac{Bt'}{2}$] $: \frac{Bt}{2}$, onde CSM : CMT $:: t : t'$, cioè *in ogni trajettoria l'aree comprese dai raggi vettori e dall' arco della curva, son proporzionali ai tempi impiegati a trascorrerlo*.

186. II. Sia l' angolo CSM $= \beta$, e si avrà il settore SCM $= \frac{1}{2}\int z^2 d\beta$ (L. 948) $= \frac{1}{2}$ Bt (185); dunque differenziando, $z^2 d\beta = $ Bdt ovvero $\frac{d\beta}{dt} = \frac{B}{z^2}$; e in un altro punto di curva si avrebbe $\frac{d\beta'}{dt'} = \frac{B}{z'^2}$, onde $\frac{d\beta}{dt} : \frac{d\beta'}{dt'} :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$: ma $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt'}$ sono archi o spazj divisi per i tempi in cui si trascorrono, cioè celerità con cui il raggio vettore descrive gli archi o angoli $d\beta$, $d\beta'$, *celerità* che perciò i Meccanici chiamano *angolari*; dunque *in ogni trajettoria le celerità angolari sono in ragione inversa del quadrato dei raggi vettori*.

187. III. Supposta ora MN tangente in M, si conduca ad essa la normale CN $= q$, e poichè M$b = ds$ (184), si avrà MC$b = \frac{z^2 d\beta}{2} = \frac{Bdt}{2}$ (186) $= \frac{qds}{2}$ (L. 515); dunque

la celerità effettiva $\frac{ds}{dt}$ (184) $= c = \frac{B}{q}$: ma in S, cioè nel principio del moto si ha $c = p$, $q = k$ (185); dunque $B = kp$ e $\frac{ds}{dt} = c = \frac{kp}{q}$; dunque *in ogni trajettoria le celerità effettive sono inversamente come le normali condotte dal centro sulle tangenti.*

188. Ripiglio ora l' equazioni (185) $\frac{Fdt(a-x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $-\frac{Fydt}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e moltiplicando l' una per $\frac{dx}{dt}$, l'altra per $\frac{dy}{dt}$ e poi sommandole, ottengo, fatta dt costante, $\frac{-F[ydy-(a-x)dx]}{z} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2}$: ma $ydy - (a - x)dx = \frac{d[y^2 + (a-x)^2]}{2} = \frac{d(z^2)}{2}$ (L. 473) $= zdz$, e $\frac{dxddx + dyddy}{dt^2} = \frac{d(dx^2 + dy^2)}{2dt^2} = \frac{d(ds^2)}{2dt^2} = \frac{d(c^2)}{2} = cdc$; dunque I°. $-F = \frac{cdc}{dz}$: inoltre poichè $c = \frac{kp}{q}$ (187), $dc = \frac{-kpdq}{q^2}$, sarà II°. $F = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz}$: quindi essendo $c^2 = \frac{k^2p^2}{q^2}$, $\frac{dq}{q} = d(Lq)$ (L. 851), verrà III°. $F = \frac{c^2 . d(Lq)}{dz}$: infine da $q = \frac{kpdt}{ds}$ (187) si ha $dq = \frac{-kpdtdds}{ds^2}$, e presa al solito dx costante, da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ si ha $dds = \frac{dyddy}{ds}$; dunque introducendo il raggio osculatore r (L. 868), avremo $dq = \frac{-kpdtdyddy}{ds^3} = \frac{kpdtdy}{rdx}$: ma dt, dx costanti danno (185) $a = x$ onde $B = \frac{ydx}{dt} = kp$ (187), $z = \sqrt{[y^2 + (a-x)^2]} = y$ ed $\frac{ydx}{dt} = \frac{zdx}{dt} = kp$; dunque $dq = \frac{zdz}{r}$ e perciò IV. $F = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz} = \frac{k^2p^2z}{q^3r}$.

189. IV. Riunendo pertanto i quattro valori di F, si trova

 FIG.

trova che in ogni trajettoria la forza centrale è $F = \frac{-cdc}{dz} = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz} = \frac{c^2 . d(Lq)}{dz} = \frac{k^2p^2z}{q^3r}$. In un altro punto di curva si avrebbe dunque $F' = -\frac{c'dc'}{dz'} = \frac{k^2p^2dq'}{q'^3dz'} = \frac{c'^2 . d(Lq')}{dz'} = \frac{k^2p^2z'}{q'^3r'}$; e perciò preso l' ultimo valore, $F : F' :: \frac{z}{q^3r} : \frac{z'}{q'^3r'}$, cioè *in ogni trajettoria le forze centrali son come i raggi vettori divisi per il prodotto dei raggi osculatori nel cubo delle normali condotte dal centro sulle tangenti*. Tali sono le più utili proprietà generali delle trajettorie: se si fissi la legge con cui opera la forza centrale, potranno aversene delle particolari.

190. V. Operi, per esempio, questa forza in ragione inversa del quadrato delle distanze (4). Supposto che in una data distanza b dal centro C la forza F divenga la solita forza g di gravità (44), e però si abbia $F : g :: b^2 : z^2$ 12
onde $F = \frac{b^2g}{z^2}$, sarà $Fdz = \frac{b^2gdz}{z^2} = -cdc$ (189), ed integrando, $\frac{-b^2g}{z} + Cost. = -\frac{c^2}{2}$. Per determinar la costante, basta rammentarsi che quando il raggio vettore CM diventa CS, la celerità c si cangia in quella di projezione p (185), cioè quando $z = a$, si ha $c = p$; dunque $-\frac{b^2g}{a} + Cost. = \frac{-p^2}{2}$ e però $Cost. = \frac{b^2g}{a} - \frac{p^2}{2}$, e l'integrale completa sarà $\frac{-b^2g}{z} + \frac{b^2g}{a} - \frac{p^2}{2} = \frac{-c^2}{2}$; dal che si deduce che *operando la forza centrale in ragione inversa del quadrato delle distanze, la celerità di rivoluzione in qualunque punto della trajettoria è* $c = \sqrt{[p^2 - 2b^2g(\frac{1}{a} - \frac{1}{z})]}$.

191. VI. Sieno f, h l' altezze dovute alle celerità c, p di rivoluzione e projezione, onde $f = \frac{c^2}{2g}$ ed $h = \frac{p^2}{2g}$ (70); dunque l' equazione di sopra diverrà $\sqrt{2fg} = \sqrt{[2gh - 2b^2g(\frac{1}{a} - \frac{1}{z})]}$, e però se si conoscano f, h, potrà co-

noscersi anche il raggio vettore z, cioè *operando la forza centrale nella ragione già detta, il raggio vettore è* $z = \frac{ab^2}{b^2 - a(h-f)}$.

192. VII. Se ora si vogliano i punti della curva in cui la celerità c è massima o minima, ripresa l' equazione $b^2gz^{-2}dz = -cdc$ (190), avremo (L. 878) $dc = \frac{-b^2gz^{-2}dz}{c} = 0 = \pm\frac{dz}{z^2}$, e nuovamente differenziando, presa dz costante, verrà $\mp\frac{2dz^2}{z^3}$, il che dimostra (L. 879) che $\frac{dz}{z^2}$ corrisponde al massimo, e $\frac{-dz}{z^2}$ al minimo: ma $\frac{\pm dz}{z^2} = d\left(\frac{1}{\mp z}\right) = d\left(\frac{b^2 - a(h-f)}{\mp ab^2}\right)$ (191) $= \frac{df}{\mp b^2}$; dunque $\frac{df}{\mp b^2} = 0 = df$; ed integrando, $f = Cost.$: ma f non può esser costante se non quando c cangiandosi in p, anche f diventa h; dunque $Cost. = h = f$, $f - h = 0$, onde $z = a$ (191). Ora è chiaro che la porzione indeterminata a dell'asse può prendersi tanto di quà che di là da C; dunque *operando la*
12 *forza centrale al solito, la celerità è massima o minima quando il raggio vettore o di quà o di là da* C *si confonde con l' asse* CS.

Perciò se la trajettoria sia diversa dal circolo, 1°. attese l' aree eguali che il raggio vettore dee descrivere in tempi eguali (185), la celerità massima sarà nella massima vicinanza, la minima nel massimo allontanamento dal centro C: 2°. anche la forza centripeta, dovendo ritenere il mobile nella sua orbita onde non fugga per la tangente (130), diverrà più grande o più piccola col crescere o con lo scemare di questa celerità, che sempre lo sollecita alla fuga.

Gli Astronomi fanno un grand' uso di queste proprietà, e dopo averne dedotte le trajettorie planetarie, fissano anche con l' osservazione e col calcolo le quantità a, b, f, h, che quì lasciamo nella loro indeterminata generalità, per investigare due altre trajettorie, le quali appartengono più da vicino al nostro soggetto. Potrebbero dedursi anche queste dalle formule generali di sopra (184): ma ci piace trattarle con un metodo ancor più semplice.

193. Vogliasi la trajettoria d'un mobile lanciato obliquamente con una data celerità C. La forza centrale f che si combina con la momentanea F (130) è dunque ora la forza stessa di gravità g (44). Sia pertantò la data celerità C quella a cui è dovuta l'altezza $a = AB$. Onde $C = \sqrt{2ag}$ (70); e poichè i raggi vettori BC, DE posson 13
prendersi per paralleli (42), sia $BD = S$ lo spazio che la forza momentanea farebbe percorrere al corpo B nel tempo T, se la forza centrale non lo facesse scendere in un egual tempo t per la verticale $DM = s$. Avremo dunque $T = t$: ma il moto per DB è uniforme (6) onde $T = \frac{S}{C} = \frac{S}{\sqrt{2ag}}$ (29), e il moto per DM è uniformemente accelerato (8) onde $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (64): dunque $\frac{S}{\sqrt{2ag}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ ed $S^2 = 4as$, equazione alla trajettoria cercata che è una parabola (L. 748), il cui diametro è BC, il parametro è $4a$, e l'angolo delle coordinate BD, DM è l'angolo BDE, complemento dell'angolo DBE di projezione. Or se si faccia $BE = x$, $EM = y$, $tang\ DBE = t$, si avrà (L. 650) $ED = tx$, $DM = tx - y = s$, $BD = \sqrt{(t^2 x^2 + x^2)} = S$ (preso $R = 1$), e l'equazione $S^2 = 4as$ diverrà $x^2 (t^2 + 1) - 4a (tx - y) = 0$, ove si contiene tutta la teoria della *Balistica* o arte del bombardare, esprimendo t la tangente dell'angolo che l'asse del Cannone dee far con l'orizzonte, ed a la forza della polvere cioè l'altezza BA a cui salirebbe la palla B lanciata verticalmente. Eccone qualche applicazione.

194. I. Data la forza della polvere, trovar l'angolo a cui dee porsi il Cannone onde colpisca il dato scopo S, S', S''. Poichè è dato lo scopo S, cioè si è misurata con le regole trigonometriche o in altro modo, la distanza BS e si è preso l'angolo SBG, potrà aversi anche BS' ed SS' (L. 644. 645). Sia perciò $BS' = x = b$, $S'S = y = c$, e sostituendo nell'equazione di sopra (193), si avrà l'angolo cercato per mezzo della sua tangente $t = \frac{2a \pm \sqrt{[4a(a-c) - b^2]}}{b}$. Se lo scopo S' sia nell'orizzontale stessa BG, sarà $S'S = y = c = 0$, onde $t = \frac{2a \pm \sqrt{(4a^2 - b^2)}}{b}$; e se S'' sia sotto l'orizzontale BG, dovrà farsi $S'S'' = -y = -c$, onde

$t = \frac{2a \pm \sqrt{[4a(a+c) - b^2]}}{b}$. Dal che si vede in generale 1°. che per la possibilità del colpo è necessario che non sia mai nel primo caso $4a^2 < 4ac + b^2$, nel secondo $4a^2 < b^2$, nel terzo $4a^2 + 4ac < b^2$: 2°. che due essendo i valori di t, due son sempre gli angoli che soddisfanno al problema, dei quali il più grande si adopera allorchè lo scopo da colpirsi è un piano orizzontale come un tetto ec., e il più piccolo quando lo scopo è un piano verticale come un muro ec.

195. II. Data la forza della polvere, trovare il massimo tiro o la massima distanza orizzontale BG a cui può
13 giungere la bomba B. Si ha dunque ora BG $= x$ e però $y = 0$ ed $x = \frac{4at}{1+t^2}$, quantità che dee essere un *massimo*. Differenziando pertanto, considerata t come incognita perchè tutto si riduce a determinar l'angolo che dia il massimo tiro, si avrà (L. 847. 878) $\frac{dx}{dt} = \frac{4a - 4at^2}{(t^2+1)^2} = 0 = 1 - t^2$, onde $t = 1$, massimo cercato (L. 879). Ora la tangente eguale al raggio corrisponde ad un angolo di 45° (L. 613. 3°); dunque il massimo tiro si avrà quando il Cannone farà con l'orizzonte un angolo semiretto.

196. III. Dato l'angolo del Cannone e l'ampiezza del tiro, trovar la forza della polvere. Son dunque dati $x = b$, $y = c$, e t; onde la cercata $a = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$.

197. IV. Dato lo scopo S, trovar la minima forza della polvere che potrà farvi giunger la palla B. Si avrà dunque, come prima, $x = b$, $y = c$, ma non già t, e converrà determinarla per aver a. Ora $a = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$, quantità che deve essere un *minimo*; e però differenziando, si troverà $\frac{da}{dt} = \frac{4b^2(bt^2 - 2ct - b)}{(4bt-4c)^2} = 0 = bt^2 - 2ct - b$, dal che si ha $t = \frac{c \pm \sqrt{(b^2+c^2)}}{b}$, e nuovamente differenziando, $\frac{da}{dt} = bt^2 - 2ct - b$, per distinguere il minimo dal

massimo (L. 879), viene $\frac{dda}{dt^2} = 2(bt - c) = \pm 2\sqrt{(b^2 + c^2)}$; onde il minimo cercato si avrà prendendo il valor positivo di t, che sostituito nel valor di a, dà la minima carica $a = \frac{c + \sqrt{(b^2 + c^2)}}{2}$.

Tutto ciò vale quando la resistenza del mezzo sia nulla: se il mezzo resista, ed il projettile abbia una considerabil celerità, la trajettioria sarà una curva molto più complicata e l' ampiezze dei tiri non corrisponderanno a questi calcoli: i Pratici insegnano qualche metodo approssimato per correggerne i risultati.

198. Vogliasi ora la trajettoria d' un mobile animato da due forze BC, BD tra loro normali in modo che la forza centrale acceleratrice g' o la celerità che ella farebbe nascere in 1″, stia alla solita forza acceleratrice g di gravità come il doppio $2a$ della consueta verticale AB, al raggio vettore CB $= r$. Non supponendosi quì un raggio vettore infinito, prendo BD infinitesima, e condotta DM nella direzione del centro C, faccio ML parallela a BD; e giacchè BD ($=$ S) è infinitesima, lo sarà anche DM ($= s$), perchè sono esse gli spazj che le due forze finite, momentanea e centrale, farebbero scorrere al corpo in egual tempo infinitesimo: sarà anche BL $=$ DM $= s$, perchè tra le distanze BC infinita e BD finita vi è la medesima ragione che tra le distanze BC finita e BD infinitesima (L. 197. 1°), e si sa che nel primo caso BC, DM posson prendersi per parallele (42): infine presa CE $=$ CB $= r$, sarà EL $= 2r - s = 2r$, perchè s è infinitesima (L. 197. 6°). 1

Posto ciò, poichè per ipotesi $g' : g :: 2a : r$, sarà $g' = \frac{2ag}{r}$; onde ripetuto il raziocinio di sopra (193), si avrà $T = \frac{S}{C} = \frac{S}{\sqrt{2ag}}$, $t = \sqrt{\frac{2s}{g'}} = \sqrt{\frac{rs}{ag}}$, $T = t$, e però $S = \sqrt{2r} \times s = \sqrt{(2r - s)\, s}$, ed $S^2 = 2rs - s^2$, equazione alla trajettoria cercata che, atteso l'angolo retto delle coordinate, è un circolo del raggio CB $= r$ (L. 478). Esaminiamo questa curva.

199. Si sa che in ogni trajettoria le celerità effettive del mobile sono in ragione inversa delle normali condotte dal centro sulle tangenti (187), e che queste normali nel

circolo sono gli stessi suoi raggi (L. 410); dunque le celerità del mobile *in tutti i punti della curva circolare* saranno eguali, ed egli in tempi eguali trascorrerà degli spazj eguali, cioè *il moto sarà uniforme* (6).

200. II. Poichè la forza centripeta avvicina il corpo,
12 e la centrifuga lo allontana in un dato tempo dal centro,
se nella curva SM si descriva col raggio CS l'arco SB,
sarà DA la quantità di cui si avvicina il corpo al centro
C, e sarà BD (differenza tra DC ed SC) la quantità di
cui se ne allontanerebbe; onde nella curva SM le due for-
12 ze, proporzionali ai loro effetti DA, BD, son diseguali.
e Non così nel circolo, ove l'effetto DA o DM della cen-
1 tripeta è manifestamente eguale all'effetto BD o MD del-
1 la centrifuga. Ora $DM = BL = \frac{BM^2}{EB}$ (L. 473) perchè l'arco infinitesimo BM si confonde con la sua corda; dunque *lo spazio* BL *che la forza centrale farebbe trascorrere al corpo in un istante, eguaglia il quadrato dell'arco* BM *che realmente trascorre, diviso per il diametro del circolo*.

201. III. Essendo $2ag = C^2$, sarà (198) $g' = \frac{C^2}{r}$, valore della forza centrale acceleratrice nel punto del circolo ove si trova il corpo μ: ma se si voglia la misura assoluta della forza motrice $F = g'\mu$ (40) $= \frac{C^2\mu}{r}$, sarà $C^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$ (35), $ds^2 = BM^2 = EB . BL = 2r . BL$, ed $F = \frac{\mu . 2BL}{dt^2}$.

202. IV. Sieno F, F' le forze centrali in due diverse circonferenze EMB, GNH, e avremo (201) $F : F' :: \frac{C^2\mu}{r} : \frac{C'^2\mu'}{r'}$, cioè *nelle trajettorie circolari le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e dei quadrati delle lor celerità, ed inversa dei raggi*. Che se le circonferenze EMB, GNH sieno $2r\pi$, $2r'\pi$ (L. 520) e sieno τ, τ' *i tempi periodici* impiegati a trascorrerle, il moto uniforme (199) ci darà $C \left(= \frac{S}{T}\right) = \frac{2r\pi}{\tau}$, $C' \left(= \frac{S'}{T'}\right) = \frac{2r'\pi}{\tau'}$; e però $F : F' :: \frac{r\mu}{\tau^2} : \frac{r'\mu'}{\tau'^2}$, cioè *le forze centrali sono in ragion*

diretta composta delle masse e dei raggi , ed inversa dei quadrati dei tempi periodici . Anzi , poichè $C : C' :: \frac{r}{\tau} : \frac{r'}{\tau'}$, si avrà anche $F : F' :: \frac{C\mu}{\tau} : \frac{C'\mu'}{\tau'}$, cioè *le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e delle loro celerità , ed inversa dei tempi periodici .*

Da queste tre analogìe può dudursi nei varj casi di $C = C'$, di $\mu = \mu'$, di $r = r'$ ec. una quantità di importantissime conseguenze . Bastino le seguenti .

203. V. Se le forze centrali F , F' sieno reciprocamente come i quadrati delle distanze dal centro C, si avrà $F : F' :: r'^2 : r^2 :: \frac{r\mu}{\tau^2} : \frac{r'\mu'}{\tau'^2}$ (202) , onde fatto $\mu = \mu'$, sarà 1
$\frac{r'^3}{\tau'^2} = \frac{r^3}{\tau^2}$, e quindi $r^3 : r'^3 :: \tau^2 : \tau'^2$, cioè i quadrati dei tempi periodici di due mobili eguali che girano in due diverse circonferenze , sono come i cubi dei raggi .

204. VI. Se la Terra gira intorno all' asse Pp, le forze centrifughe di tre sue particelle in H , N , P daranno l' analogìe $F : F' : F'' :: \mu . HC : \mu' . NX : \mu'' . o$ (202) , e supponendo eguali le masse , verrà $F : F' : F'' :: HC : NX : o$, cioè nell' equatore H la forza centrifuga è massima , perchè è massimo il raggio CH ; nel polo P è nulla , perchè il raggio è zero , e nel luogo intermedio N , è minor che nell' equatore , perchè $NX < CH$; onde la gravità che opera contrariamente alla forza centrifuga , agirà nei poli come se la Terra non girasse , nell' equatore sarà diminuita di tutta la forza centrifuga a cui si oppone direttamente , e nelle zone medie soffrirà una diminuzione tanto più grande , quanto N sarà più vicino ad H . Dunque se la Terra fu nel suo principio una sfera fluida , perdè certamente la sua figura appena cominciò a muoversi in giro , e divenne una sferoide elevata all' equatore e compressa ai poli , compensando in tal guisa con una maggior quantità di fluido la diminuzione della gravità . Ora tutto ciò si accorda mirabilmente con le ripetute osservazioni dei Fisici .

Comunicazione del moto .

205. Allorchè due corpi si urtano , passa il moto dall' uno nell' altro (16) con delle leggi che dipendono egual-

mente e dalla tessitura delle loro parti e dalla particolar linea dei movimenti, poichè quì prescindiamo dall' esterna configurazione, e dai piani su cui si fa il movimento. Quanto alla struttura dei corpi, essi si riducono alle due classi di *perfettamente molli* che mancanti d' ogni intrinseca forza di restituzione, rimangono dopo l' urto nello stato di compressione a cui l' urto medesimo gli ridusse, e di *perfettamente elastici* che dotati d' una piena forza di restituzione, tornano dopo l' urto allo stato di prima: non parliamo dei *perfettamente duri* che non cedono alla più valida compressione, perchè qualunque sia la lor natura, mancano come i molli d' ogni intrinseca forza, e perciò con le leggi stesse dei molli si comunicano il movimenco. Nè sembri strana questa divisione a chi sa non esservi alcun corpo in natura perfettamente elastico o molle; poichè fatta da principio l' ipotesi della sua esistenza, insegneremo poi a rettificare i risultati in qualunque caso d' imperfetta elasticità. Quanto alla linea dei movimenti, ella può essere o *diretta* o *obliqua* (12), onde anche la comunicazion del moto dee considerarsi in questi due casi. Cominciamo dall' urto diretto.

206. Sieno due corpi in movimento, e sia M la massa, C la celerità dell' uno, ed m la massa, $\pm c$ la celerità dell' altro, la quale sarà positiva se m si muova dalla parte stessa di M, cioè se i due corpi si inseguano, e sarà negativa se m si muova oppostamente ad M, cioè se i due corpi s' incontrino. È chiaro (19) che i loro moti saranno MC, $\pm mc$, e posto x il moto che riceve m per l' azione di M, sarà x il moto che perde M per la reazione di m (16); dunque dopo l' urto, il moto o forza di M sarà $F = MC - x$, e quella di m sarà $f = x \pm mc$. Chiamando pertanto C', c' le celerità di M, m dopo l' urto, poichè $C' = \frac{F}{M}$, $c' = \frac{f}{m}$ (21), le celerità di M, m dopo l' urto, saranno $C' = \frac{MC - x}{M}$, $c' = \frac{x \pm mc}{m}$.

207. Ora i corpi perfettamente molli o duri hanno in se la sola forza d' inerzia che si è già calcolata, e niun' altra forza può immaginarsi in essi che gli obblighi dopo l' urto a separarsi (205); dunque M strascinerà seco m dopo averlo raggiunto, e movendosi ambedue come un sol cor-

po,

po, la differenza delle loro celerità sarà nulla. Avremo perciò $\frac{MC - x}{M} - \frac{x \mp mc}{m} = 0$, onde $x = \frac{1\,(MmC \mp Mmc)}{M + m}$.

208. Non così i corpi perfettamente elastici, che avendo oltre la forza d' inerzia, una forza di restituzione eguale a quella di compressione, tornano dopo l' urto allo stato di prima (205), e perciò conservano la differenza medesima $C \mp c$ di celerità, che ebbero prima d' urtarsi; onde le celerità prima dell' urto sono in proporzione aritmetica con le celerità dopo l' urto (L. 202. 2°). Osservo pertanto che supposta $C > c$, se i corpi fossero molli, la celerità di m dopo l' urto eguaglierebbe quella di M (207); dunque se sieno elastici, la celerità $\frac{x \pm mc}{m}$ di m, o i corpi si inseguano o si incontrino, supererà la celerità $\frac{MC - x}{M}$ di M, perchè la forza di restituzione operando in M verso m ed in m verso M, si aggiunge ad m un nuovo colpo che lo accelera, ed M ne riceve un altro che lo ritarda. Sarà dunque $\frac{x \pm mc}{m} > \frac{MC - x}{M}$, e la proporzione aritmetica $C : \pm c \;.\cdot.\; c' : C' \;.\cdot.\; \frac{x \pm mc}{m} : \frac{MC - x}{M}$ darà (L. 208) $x = \frac{2\,(MmC \mp Mmc)}{M + m}$.

209. Dunque la forza perduta da un corpo elastico è doppia della forza perduta da un corpo molle, e i limiti tra la mollezza ed elasticità perfetta sono 1, 2: perciò se si ponga n in luogo dei coefficienti 1, 2, e sia o $n = 1$, o $n > 1$, o $n < 2$, o $n = 2$, il moto che due corpi in qualunque grado elastici hanno perduto nell' urto, potrà generalmente esprimersi con la formula $x = \frac{n\,(MmC \mp Mmc)}{M + m}$.

Se dunque si vogliono le celerità C', c' dopo l' urto dei due corpi M, m, basterà sostituir nelle formule di C', c' trovate di sopra (206), i valori di x (207. 208. 209) e si avrà

210. Per gli elastici in generale $C' = C - \frac{nm\,(C \mp c)}{M + m}$,

$c' = \frac{nM(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

211. Per i perfettamente elastici $C' = C - \frac{2m(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{2M(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

212. Per i perfettamente molli $C' = c' = \frac{MC \pm mc}{M+m}$.

213. Con queste formule potranno sciogliersi tutti i problemi relativi all' urto di due corpi nei varj casi di $C = c$, di $M = m$ ec. Eccone alcuni d' altro genere.

214. I. Essendo $MC^2 + mc^2$ la somma dei prodotti delle Masse elastiche nel quadrato della loro celerità, prima dell' urto: trovar la somma di questi stessi prodotti dopo l' urto. Saranno essi $MC'^2 + mc'^2$; e sostituendo i valori di $C' = \frac{C(M-m) \pm 2mc}{M+m}$, e di $c' = \frac{2MC \mp c(M-m)}{M+m}$, riducendo, e dividendo per $(M+m)^2$, si ha $MC^2 + mc^2$; cioè *la somma dei prodotti delle Masse elastiche nel quadrato della loro celerità, si conserva dopo l' urto quale era prima*, ciò che alcuni chiamano *conservazion delle forze*.

II. Trovar la massa d' un corpo elastico tale, che posto in mezzo ai due elastici M, m, il corpo M che solo si muove, imprima ad m la massima possibil celerità. Sia y la massa cercata; e poichè M percuote y, dovrà sostituirsi y ad m nella formula di c' (210), ove sarà $c = 0$ perchè y riposa; dunque y dopo l' urto avrà la celerità $c' = \frac{nMC}{M+y}$. Di nuovo, poichè y percuote m con la celerità $\frac{nMC}{M+y}$, dovrà sostituirsi y ad M nella formula stessa di c', ove sarà $C = \frac{nMC}{M+y}$ e $c = 0$, perchè anche m riposa; dunque m dopo l'urto avrà la celerità $c' = \frac{ny \cdot nMC}{(M+y)(y+m)}$, la quale deve essere un massimo. Differenziando dunque (L. 878), verrà $\frac{dc'}{dy} = \frac{n^2MC(M+y)(y+m) - n^2MCy(M+m+2y)}{[(M+y)(y+m)]^2}$ $= 0 = n^2M^2mC - n^2MCy^2$, cioè $y = \sqrt{Mm}$, valore che esprime un massimo (L. 879); onde la massa cercata y dee esser media proporzionale tra le due date (L. 477).

III. Trovar la celerità C' di M dopo l' urto quando l' altro corpo m è un ostacolo insuperabile in quiete. Sarà dunque $c = 0$ e l' ostacolo insuperabile $m = \infty$, onde (210) $C' = C - \frac{n \infty C}{M + \infty} = C - nC = (1 - n)\,C$ (L. 197. 6°), e $c' = \frac{nMC}{M + \infty} = 0$ (L. 197. 1°), cioè se $n = 1$ ovvero se i corpi son perfettamente molli, si ha $C' = 0$ e ambedue i corpi restano dopo l' urto in quiete; se $n = 2$ ovvero se i corpi son perfettamente elastici, si ha $C' = -C$, ed M torna indietro con la sua celerità primitiva, restando m nella sua quiete; e se $n > 1$ e < 2, ovvero se i corpi sono imperfettamente elastici, il corpo M torna indietro con una celerità tanto minore della primitiva, quanto è più grande l' imperfezione della sua elasticità.

215. Da questo problema nasce la prima nozione del *moto riflesso* per cui i mobili all' incontrar d' un ostacolo smisurato, son ripercossi dopo l' urto e perdono la prima lor direzione. Si impara dunque di quì che un corpo investendone direttamente un altro che non può smuovere, 1°. se sia molle, perde ogni moto e non si riflette; 2°. se sia elastico, si riflette, ma non torna esattamente al luogo d' onde partì, se non nel caso d' una perfetta elasticità. E si osservi che per produrre in un corpo elastico la riflessione, non sempre è necessario di farlo urtare in una massa enorme ed immobile: anzi se sia $M = m$, o $C = \frac{mc}{M}$, o $C = c$ e di più $M = 3m$ ovvero $3M = m$ ec., in tutti questi casi si avranno delle riflessioni o nell' uno o nell' altro o in ambedue i corpi: per altro il moto riflesso ordinariamente si considera nel solo caso della quiete ed insuperabilità d' un ostacolo.

216. Vengo all' urto obliquo, ed avverto di passaggio che se un corpo qualunque m in riposo riceva un urto obliquamente o per una direzione che non passi per il suo centro di gravità, oltre il moto uniforme di projezione a seconda dell' impulso che ha ricevuto (6), deo concepirne un altro parimente uniforme di rotazione intorno al suo medesimo centro; poichè la forza obliquamente impressa equivale ad un peso aggiunto alle molecule d' una parte del corpo, alle quali perciò non posson più fare equilibrio le molecule dell' altra parte (110); quelle dunque si mo-

veranno all' innanzi e queste in conseguenza all' indietro, di modo che l' inerzia perpetuando nell' une e nell' altre il movimento (14), si rivolgeranno tutte insieme intorno ad un asse comune, descriveranno delle circonferenze che avranno per centri i varj punti di quest' asse, e il loro moto sarà necessariamente uniforme (199).

217. Tralasciato però un più pieno esame di questo secondo moto di rotazione, ritorno al primo di projezione, e
14 supposto che i due globi M, m si muovano da A, a con le direzioni convergenti e con le celerità AO, ao e si incontrino in T, cerco le celerità C', c' dopo l' urto. Risolute a tale effetto le date celerità AO, ao nelle AB, AD, ab, ad, l' une parallele e l' altre normali alla linea Oo dei centri (99), è chiaro che AB, ab parallele tra loro, non influendo nell' urto, si conserveranno intere dopo di esso, e l' urto sarà prodotto dalle sole BO, bo opposte. Sia dunque AO $= a$, $ao = b$, ed essendo date le direzioni dei globi e perciò noti gli angoli AOB, aob, pongasi AOB $= h$, $aob = k$. Fatto il solito raggio R $= 1$, si avrà (L. 645) BO $= C = a \cos h$, $bo = c = b \cos k$, e quindi (210) $C' = a \cos h - \frac{nm(a \cos h \mp b \cos k)}{M + m}$, $c' = \frac{nM(a \cos h \mp b \cos k)}{M + m} \pm b \cos k$. Prese pertanto OE $= C'$, $oe = c'$ ed alzate da E, e le normali EG, eg eguali ad AB, ab che l' urto non alterò, si avranno le celerità dopo l' urto obliquo espresse dalle diagonali OG, og. Basti un' applicazione di questa dottrina.

218. Trovar la celerità C' e la direzione di M dopo l' urto, quando m è un ostacolo insuperabile in riposo. Poichè $c = 0$, $m = \infty$, sarà come sopra (214) $C' = (1 - n)C$, cioè la celerità BO di M diviene zero dopo l' urto se $n = 1$; divien negativa ma eguale alla positiva prima dell' urto se $n = 2$, e divien negativa ma minor della positiva se $n > 1$ e < 2. Onde nei corpi di perfetta mollezza, tutta la celerità BO si perde nell' urto; perciò restando intatta la celerità AB (217), il corpo M dopo l' urto scorre con essa lungo la retta OF: ma nei corpi di perfetta elasticità, prolungata l' inalterabile AB in N finchè sia BN $=$ BA, la diagonale ON esprimerà la celerità di M dopo l' urto, perchè essendo OB normale ad AN ed AB $=$ BN, si avrà AO $=$ ON e l' angolo AOB $=$ NOB (L. 438).

 FIG.

219. Si ha di quì la rimanente teorìa del moto rifles- 14
so, e si impara che un corpo investendone obliquamente un altro che non può smovere, 1°. se sia perfettamente molle, non si riflette, e solo scorre per OF perpendicolarmente alla linea dei centri; 2°. se sia perfettamente elastico, si riflette con una celerità ON eguale alla primitiva AO, e fa con OB l'*angolo di riflessione* NOB eguale all' *angolo d' incidenza* AOB.

220. Infine se i corpi che fin quì abbiamo supposti perfettamente elastici o molli, manchino di questa perfezione, non sarà difficile di correggere i risultati del calcolo, riducendosi tutto a determinare n (209). Per maggior semplicità pongo in quiete il corpo m, ed osservo con un' esperienza accurata la celerità C' di M dopo l' urto. Sia dunque $M = 6$, $m = 5$, $C = 4$, $c = 0$ e mi venga dall' esperienza, $C' = 2$: avremo pertanto (210) $C' \left(= C - \frac{nmC}{M+m} = 4 - \frac{20n}{11} \right) = 2$, onde $n = \frac{44-22}{20} = \frac{11}{10}$; dunque per questi corpi le celerità dopo l' urto divengono $C' = C - \frac{11m(C \mp c)}{10(M+m)}$, $c' = \frac{11M(C \mp c)}{10(M+m)} \pm c$.

Moto dei solidi nei fluidi.

In tutte le specie di movimento considerate finora, si è supposto che i corpi si movessero nel vuoto (17); è tempo ormai di considerare alcune modificazioni che introduce nel moto la resistenza dei mezzi, e parleremo per ora del *moto rifratto* per cui i mobili mentre da un fluido o mezzo passano in un altro mezzo eterogeneo, soffrono un cangiamento o nella celerità, o nella celerità insieme e nella direzione.

221. Passi il solido A normalmente per AB dal mezzo
AI nel mezzo IH, l' uno e l' altro tranquilli: riguardan- 15
do il corpo A e il fluido IH come due masse che si urtano, e chiamata C la celerità del solido, $c = 0$ quella del fluido, avremo (210) $C' = C - \frac{nmC}{M+m}$: dal che si deduce 1°. che come il moto dopo l' urto diretto continua nella direzione di prima (208), così *il corpo A urtando il fluido* IH *direttamente in* B, *continua a muoversi per* BD

15 *nella direzione di* AB: 2°. che la celerità C prima dell'urto riducendosi dopo l'urto a $C' = C\left(1 - \frac{nm}{M + m}\right)$, *il corpo* A *nel passaggio dall'uno all'altro fluido, perde una porzione della sua celerità primitiva.*

222. E quì si osservi che se sieno d, d' le densità dei fluidi AI, IH, e v il volume che nell'uno e nell'altro è percosso da A, avremo la massa del fluido $\mu = dv$ quando A passa da HI in IA, e $\mu' = d'v$ quando passa da AI in IH (11); onde posta C la primitiva celerità di A in ambedue i casi, sarà $C' = C\left(1 - \frac{ndv}{M + dv}\right)$ nel primo, e $C'' = C\left(1 - \frac{nd'v}{M + d'v}\right)$ nel secondo. Supposta dunque $C' > C''$, sarebbe $1 - \frac{ndv}{M + dv} > 1 - \frac{nd'v}{M + d'v}$, cioè $\frac{nd'v}{M + d'v} > \frac{ndv}{M + dv}$ cioè $d' > d$, e però *se la densità* d' *del fluido* HI *superi la* d *del fluido* IA, *anche la celerità* C' *con cui* A *uscito da* HI *si muove per* IA, *supererà reciprocamente la* C'' *con cui uscito da* AI *si muove per* IH.

223. Passi ora il corpo E obliquamente da AI in IH con la celerità EB. Risoluta EB nelle due AE ed EI = AB, l'una parallela e l'altra normale alla superficie IG (99), è chiaro che la celerità AE non opponendosi al mezzo resistente IH, non soffrirà cangiamento, e si conserverà intera anche dopo il passaggio: ma si è veduto (221) che la celerità normale AB scema e diviene, per esempio, BD; dunque presa BG = AE e alzata in G la normale GK = BD, il corpo urtando in B non potrà continuar per BH, ma dovrà piegarsi in B per seguir la risultante BK (95); dunque *la celerità e la direzione del corpo* E *nel passaggio obliquo da uno in un altro mezzo eterogeneo, si cangia,* e il movimento di E chiamasi in questo caso un *movimento rifratto*. Del resto, poichè supposto $d' > d$ si ha $C' > C''$ (222), è facile di concludere in generale che *condotta per il punto* B *di passaggio la normale* AD *sulla superficie* IG *dei mezzi contigui, il corpo se ne allontana o vi si avvicina secondo che da un mezzo passa in un altro più o meno denso*. La luce sola comunemente non si rifrange con queste leggi, come a suo luogo vedremo.

224. Tutto ciò guiderebbe naturalmente a cercare la quantità della forza perduta da un corpo allochè si muove in un fluido, ovvero la resistenza che gli vien fatta dal fluido: ma questo problema che è comune egualmente ai solidi che si muovono tra i fluidi, ed ai fluidi che scorrono per mezzo ai solidi, appartiene più propriamente all'Idromeccanica ove se ne troverà una piena e dettagliata soluzione.

PARTE SECONDA

TEORÌA DELLE MACCHINE

Natura delle Macchine.

225. Tutto ciò che o trasmette o regola o accresce o diminuisce l'azione d'una forza movente dicesi *Macchina*. Così la conoide dei comuni orologj portatili, che con le spire più strette diminuisce l'azion della molla, che l'accresce con le più larghe, che la regola con l'une e con l'altre, che la trasmette con la gran ruota della sua base, è una macchina in tutti e quattro i significati.

226. Ma poichè dei varj oggetti che può avere una macchina, il più interessante è l'aumento dell'azion d'una forza, perciò la teorìa si occupa principalmente in determinare come una forza qualunque f possa rendersi capace di vincere una qualunque resistenza r: anzi siccome, se f, r possan ridursi una volta all'equilibrio, è subito in nostra mano di far prevalere f ad r sol che si aumenti la forza f o il suo momento se la resistenza sia data, oppur si scemi la resistenza r o il suo momento se sia data la forza; perciò il vero e general problema che nella teorìa delle macchine si propone a risolvere, si riduce insomma a *trovar l'equilibrio tra una forza qualunque* f *ed una qualunque resistenza* r. Ora le macchine sciolgono questo problema, e presentano in mille modi diversi un punto p d'appoggio, intorno a cui si può far l'equilibrio tra f ed r. Non lascieremo per altro di raccomandare ai Macchinisti la semplicità nelle lor costruzioni. Accumulare in una macchina i pezzi, i movimenti, le dipendenze, è un aumentarne il dispendio, ed un renderne più difficile la

conservazione, e più dubbiosa la riuscita; poichè tutti sanno in quali strane maniere l' energia d' una forza contro l' inerzia d' un peso, venga combattuta e spesso anche annichilata dalla combinazione poco sobria di ruote, di leve o d' altre potenze meccaniche, e quanto insomma pregiudichi all' effetto preteso la moltiplicità degli agenti che son di mezzo alla resistenza e alla forza. Quella è per noi la macchina più perfetta, che, a risultati eguali, impiega un minor numero di mobili e di ordigni intermedj.

L' idea d' una macchina comprende dunque essenzialmente tre cose: la forza motrice f, la resistenza r da vincersi, e il punto p d' appoggio, che è comune alla resistenza ed alla forza.

227. La *forza* è quì tutto ciò che può produrre un movimento uniforme, e secondo le varie occorrenze a cui si destinan le macchine, è l' urto momentaneo sempre ripetuto e sempre estinto ora d' un fluido, ora d' una molla, ora d' un corpo grave, ora d' un animale ec., ed è poi sempre una massa m moltiplicata per una celerità c, onde $f = mc$ (19). Si son fatte molte ricerche sul modo di stimar le forze applicate alle macchine, e si è creduto di poter tutto ristringere in una o due formule generali: ma noi non ne faremo alcun uso, troppo persuasi che non è possibile di generalizzare in questo proposito senza esporsi ad incredibili errori. Ci contentiamo dunque di avvertire che da molte esperienze si è rilevato 1°. che la forza d' un uomo in un travaglio quasi continuo di 6 o 7 ore, e con una celerità di $44^{\text{pol.}}$ in $1''$, può stimarsi di lib. 33: 2°. che la forza d' un cavallo in un travaglio di egual durata, equivale a quella di 7 uomini, ed ascende perciò a lib. 231 supposta la medesima celerità: 3°. che la forza bastante all' equilibrio non passa ordinariamente al moto se non si aumenti d' $\frac{1}{3}$ di se stessa; cosicchè se per l' equilibrio basti una forza f, vi vorrà per il moto una forza $\frac{4f}{3}$.

228. La *resistenza* è una somma d' ostacoli che fanno contrasto alla forza; e dico *una somma*, perchè non bisogna figurarsi che dal solo sforzo d' un peso risulti la total resistenza che convien superare in una macchina: altri ostacoli or più or meno considerabili e specialmente l' *attrito*

trito e la *rigidezza delle funi*, debbono entrare in calcolo se voglia determinarsi con qualche precisione l' effetto d' una macchina data. Ne parleremo altrove, e intanto osserveremo che la resistenza opponendosi alla forza, è una forza ella medesima ed ha per espressione $r = m'c'$ (19).

229. Il *punto d' appoggio* è il sostegno della forza da una parte e della resistenza dall'altra; perciò può riguardarsi anch' egli come una forza che agisce oppostamente ad f e ad r: spesso è un pernio intorno al quale possono in caso di sbilancio muoversi liberamente senza cangiar di luogo quelle parti della macchina a cui la forza e la resistenza sono applicate.

230. Le macchine sono o *semplici* o *composte*. Le semplici son comunemente sì note, che ne stimiamo inutile la descrizione. Si riducono a quattro: la *Leva*, la *Puleggia*, l' *Argano*, il *Piano Inclinato*, e potrebbero tutte ridursi alla sola leva, se alcune circostanze particolari non ci impegnassero a considerarle separatamente. Le composte sono innumerabili, perchè nascono dalle infinite combinazioni che posson farsi delle macchine semplici. Ne daremo in seguito qualche esempio: ma si osservi quì una volta per sempre, che in generale una macchina semplice divien composta col solo applicare una nuova macchina semplice ove dovrebbe applicarsi la forza. Del resto, semplice o composta che sia una macchina, poichè la condizione dell' equilibrio cercato (226) esige che le forze contrarie o le loro azioni si eguaglino, onde in generale si abbia $f = r$ (109), sarà anche $mc = m'c'$ (227. 228), ed $m : m' :: c' : c$, cioè quanto la massa m della forza è minore della massa m' della resistenza, tanto la celerità c' della resistenza sarà minore della celerità c della forza se ambedue vengano a muoversi: onde *in tutte le macchine, se dall' equilibrio si passi al moto, l' aumento dell' azion della forza o la facilità d' ottenere un effetto, è sempre a spese della prontezza e conseguentemente del tempo che conviene impiegare per ottenerlo*.

231. Molti Scrittori hanno stabilito sull' equazione $mc = m'c'$ il fondamento della Statica, e calcolando lo spazio che in tempo eguale sarebbe trascorso dalla forza e dalla resistenza, hanno dedotte di là le particolari condi-

zioni dell' equilibrio in tutte le macchine. Noi benchè col rimanente dei Meccanici, abbiamo sostituito a quell'equazione un principio o più diretto o più semplice, siamo però tanto lontani dal credere assurda, come parve a taluno, l' ipotesi d' un moto nella considerazione dell' equilibrio, che anzi in quella ipotesi, o nell' equazione $mc = m'c'$, troviamo la riconosciuta dipendenza dell' equilibrio dalle ormai sì famose *celerità virtuali*: così si chiamano quelle celerità che i corpi in equilibrio son disposti a ricevere, se l' equilibrio improvvisamente si perda; ovvero quelle, che nascerebbero in tali corpi, se rotto l' equilibrio, ciascun di essi venisse a trascorrere un certo spazio in un certo tempo. È chiaro infatti che nel parallelogram-
4 mo MINE delle forze, sono esse in equilibrio qualor la risultante agisca in senso contrario (96). Si conducan pertanto sui lati MI, ME da un punto qualunque T' della diagonale MN, le normali T'R, T'S, e verrà (L. 284) MI. MR + ME. MS — MN. MT' = 0: ma preso qualunque altro punto A', e calate sulle tre forze le normali A'T', A'X', A'C', facilmente dimostrasi che anche in questo caso si ottiene MI. MC' + ME. MX' — MN. MT' = 0, ove MC', MX', MT' son le celerità virtuali; dunque *le forze in equilibrio son reciprocamente proporzionali alle loro celerità virtuali;* o più generalmente, *è sempre zero la somma delle forze in equilibrio, moltiplicate ognuna per la sua celerità virtuale, cioè per lo spazio che il punto M, a cui la forza è applicata, trascorrerebbe nella direzion di lei, purchè gli spazj trascorsi in un senso, si abbiano per positivi, e i trascorsi nel senso opposto, per negativi:* insigne proprietà meccanica dei corpi in equilibrio, che si riguarda in oggi come la gran base di tutta la Statica. Diamone quì le prime formule generali.

232. Dai punti a cui sono applicate le forze X, Y, Z ec. in equilibrio, immagino condotte nella lor direzione le rette x, y, z ec. È manifesto che un disordine infinitesimo nell' equilibrio farà trascorrere a quelle forze in un primo istante gli spazj infinitesimi dx, dy, dz ec. esprimenti le celerità virtuali. Prese per ora tre forze X, Y, Z, sostituisco successivamente ad ognuna di esse, per esempio a Z, un punto fisso; dunque resistendo egli allo sforzo dell' altre due, ne conserverà l' equilibrio e z sarà costante: ma per l' esposta proprietà (231), le forze X, Y sono in ra-

gion reciproca delle celerità dx, dy; dunque, osservando che di due forze in equilibrio se l' una si movesse in un senso, l' altra dovrebbe muoversi nel senso opposto, si avrà $X : Y :: -dy : dx$, e quindi $Xdx + Ydy = 0$, formula generale per l' equilibrio di due forze: col raziocinio medesimo si trova del pari $Xdx + Zdz = 0$, ed $Ydy + Zdz = 0$. Or l' equilibrio che subordina l' una all' altre le tre forze X, Y, Z onde l' una non possa muoversi indipendentemente dall' altre, involve una relazione, qualunque siasi, tra le differenziali dx, dy, dz, e perciò anche tra l' integrali x, y, z; dunque ognuna di queste potrà riguardarsi come funzione dell' altre due, e si avrà (L. 930) $dx = d^y x + d^z x$, $dy = d^x y + d^z y$, $dz = d^x z + d^y z$; dunque le tre equazioni di sopra diverranno $Xd^y x + Yd^x y = 0$, $Xd^z x + Zd^x z = 0$, $Yd^z y + Zd^y z = 0$, la cui somma, prese x, y, z tutte variabili, dà $X(d^y x + d^z x) + Y(d^x y + d^z y) + Z(d^x z + d^y z) =$ (L. 930) $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, formula generale per l' equilibrio di tre forze: così $Xdx + Ydy + Zdz + \Phi d\phi +$ ec. $= 0$ sarebbe la formula per l' equilibrio di quattro, di cinque ec.

Dobbiamo avvertir però che il principio delle celerità virtuali non obbligando punto a suppor trascorso piuttosto uno spazio infinitesimo che uno spazio finito, come si è veduto (231), i Meccanici preferirono l' infinitesimo or per dare ai loro calcoli un' ampiezza maggiore, ed or per ricondurre i Problemi alla trovata formula generale. Noi richiameremo nel fine l' equazion primitiva $mc = m'c'$ applicandola ad alcuni di quei Problemi che si proporranno per esercizio degli Studiosi, onde ne vedan l' uso e il vantaggio; l' uso e il vantaggio della Formula differenziale è per lo più superiore al carattere di questi Elementi.

Leva.

La Leva è una verga inflessibile o retta o curva, di legno, di ferro o d' altra materia, adattata all' uso che se ne vuol fare, ma sempre d' una grossezza e d' una durezza, che quantunque non si possan determinar teoricamente, debbon però fissarsi per esperienza, e proporzionarsi in ge-

nerale alla lunghezza della leva, alla materia onde è fatta, e agli sforzi a cui è destinata.

16 233. Già si sa che sospendendo verticali il peso R e la forza F, l' uno in B, l' altra in A, e *collocando la linea retta o curva* AB (poichè prescindiamo per ora dal peso della leva che perciò diventa una linea, e la teoria si applica egualmente alla retta ed alla curva) *sul punto d' appoggio* p *in modo che il centro* C *di gravità, comune ad* R *e ad* F, *coincida con* p, *la forza* F (= f) *sarà in equilibrio con la resistenza* R (= r), onde rappresentando f con AF ed r con BR, si avrà AF : BR : : CB : CA ovvero f . AC = r . CB (111). Ma se restando F, R in uno stesso piano e inclinandosi parallelamente come F', R' o divergendo come F'', R', escano dalla direzion verticale, in qual modo potrà determinarsi la condizione del loro equilibrio?

234. I. Sieno le forze parallele F' = f, R' = r rappresentate da AF' = AF, BR' = BR. Risolvo (99) AF', BR' nelle AH, BI normali e nelle HF', IR' parallele alla leva o alla sua tangente AB, le quali suppongo annullate dalla struttura del pernio p (229); e la forza AF' agirà con la sola AH, e la resistenza BR' con la sola BI: ma i triangoli rettangoli F'HA, R'IB che attese le parallele son simili, danno AH : BI : : AF' : BR' : : AF : BR (233): dunque se le forze AF, BR sieno in equilibrio, vi saranno anche le AH, BI e quindi anche le AF', BR', cioè *le forze parallele* F', R' *situate in uno stesso piano, hanno la medesima condizion d' equilibrio che le verticali*.

235. II. Sieno ora le divergenti F'' = f, R' = r rappresentate da AF'' = AF, BR' = BR. Le risolvo come sopra, e la forza AF'' agirà con la sola AK = f. *sen* AF''K, e la resistenza BR' con la sola BI = r . *sen* BR'I (L. 644), posto il raggio R = 1: dal che già si vede che non essendo sempre simili, come prima, i triangoli F''KA, R'IB, l' equilibrio tra F'' ed R' non può più farsi col punto d' appoggio in C. Supposto dunque D il nuovo punto d' appoggio delle forze f. *sen* AF''K = AK, r . *sen* BR'I = BI, si avrà (233) AK . AD = BI . BD = BI (AB − AD), e quindi $\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BI}}{\mathrm{AK} + \mathrm{BI}}$ che determina il punto D: e come le divergenti AF'', BR' agiscono con le sole verticali AK, BI, il punto D sarà anche l' appoggio delle AF'', BR'.

 FIG.

Che se da D si conducano le normali DG, DE sulle direzioni di F'', R', i triangoli simili AKF'', DGA e BIR', DEB daranno AD : DG : : AF'' : AK e BD : DE : : BR' : BI, cioè $f.\,DG = \frac{AB\,.\,BI\,.\,AK}{AK + BI}$ ed $r.\,DE = BI\,(AB - \frac{AB\,.\,BI}{AK + BI}) = \frac{AB\,.\,AK\,.\,BI}{AK + BI}$; dunque $f.\,DG = r.\,DE$ ed $f : r :: DE : DG$, cioè in generale *la forza e la resistenza situate in un medesimo piano, sono in equilibrio quando stanno tra loro inversamente come le normali che dal punto d' appoggio cadono sulle lor direzioni.* 16

236. Ciò si avvera in una leva qualunque; nondimeno gli antichi Meccanici distinsero la leva in tre generi. La chiamarono *del primo genere* quando p è tra f ed r, *del secondo genere* quando r è tra p ed f, *del terzo genere* quando f è tra p ed r. Ma f, r, p, essendo insomma tre vere forze (227. 228. 229) due delle quali in caso d' equilibrio son distrutte dall' altra, la distinzione delle tre leve potrebbe tralasciarsi come superflua, se la comodità di determinar con chiarezza i diversi acquisti e perdite d'azione in queste forze, non ci inducesse a ritenerla. Supporremo però sempre che f ed r agiscano verticalmente: in caso diverso, i principj già stabiliti per l' azione obliqua (235) determineranno con egual facilità l' equlibrio.

237. LEVA DEL PRIMO GENERE. Sia la leva AB d' un qualunque peso uniforme, che riunendosi tutto nel punto di mezzo o centro C di gravità (110. 113), può riguardarsi come una nuova o forza o resistenza G applicata alla leva. Sia la lunghezza della leva AB $= 2a$, la sua densità $g = \frac{m}{v}$ (11) onde essendo $v = 2a$, sarà il suo peso o massa $m = G = 2ag$, e vogliasi la distanza $Cp = x$ del centro C da un tal punto d' appoggio p, che sopra di lui tutto il sistema sia in equilibrio, e si abbia perciò (104) $F.\,Ap = R.\,Bp + G.\,Cp$. Sarà dunque $CA = CB = a$, $Ap = a - x$, $Bp = a + x$, e quindi $f(a - x) = r(a + x) + 2agx$; pertanto I^a. $x = \frac{a(f - r)}{f + r + 2ag}$; II^a. $f = \frac{r(a + x) + 2agx}{a - x}$. 17

238. Dunque 1°. se nella prima equazione sia $f > r$, avremo x quantità positiva e il punto d' appoggio p sarà

17 tra C ed F. La quantità della forza necessaria all' equilibrio si ha dalla seconda equazione, ove se x ($= Cp$) $= a = CA$, cioè se p cada in A, sarà $f = \frac{2ar + 2a^2g}{o} = \infty$ (L. 197), e vi vorrà una forza infinita per aver l' equilibrio; se $x = \frac{a}{2}$, sarà $f = 3r + 2ag$; se $x = \frac{a}{3}$, sarà $f = 2r + ag$; e se $x = o$, cioè se p cada in C, sarà $f = r$. Onde può dirsi in generale che essendo p tra C ed F, 1°. la forza bisognevole all' equilibrio, cresce a misura che p si accosta ad F; 2°. il peso $2ag$ della leva è una nuova resistenza da vincersi, giacchè quand' anche la resistenza R svanisca e sia $r = o$, l' equilibrio esige sempre $f = \frac{2agx}{a-x}$: 3°. la forza f scemerà come $2ag$, e perciò la materia onde è fatta la leva, dee avere la minor densità possibile relativamente agli sforzi da sostenersi.

239. Dunque 2°. se nella Iª. equazione sia $f = r$, avremo x ($= Cp$) $= o$ (L. 197. 3°) e il punto d' appoggio p caderà in C, come già si è trovato; onde in questo caso il peso della leva che svanisce nella IIª. equazione, dee considerarsi per nullo.

240. Dunque 3°. se nella Iª. sia $f < r$, avremo x quantità negativa e il punto d' appoggio p' sarà tra C ed R. Cangiati pertanto i segni ad x nella IIª., verrà $f = \frac{r(a-x) - 2agx}{a+x}$: quindi se $x = o$, cioè se p' cada in C, sarà $f = r$ come sopra; se $x = \frac{a}{3}$, sarà $f = \frac{r - ag}{2}$; se $x = \frac{a}{2}$, sarà $f = \frac{r - 2ag}{3}$; se $x = a = CB$, cioè se p' cada in B, sarà $f = - ag$, e non solo non vi vorrà forza alcuna positiva per l' equilibrio, ma converrà adoperarne una negativa all' insù che eguagli la metà del peso della leva, e la leva diventerà del secondo genere. Concludasi dunque in generale, che essendo p' tra C ed R, 1°. la forza bisognevole all' equilibrio diminuisce a misura che p' si accosta ad R; 2°. il peso $2ag$ della leva è favorevole alla forza, mentre quando pur la forza F svanisca e sia $f = o$, il solo peso della leva può in certi casi fare equi-

libro alla resistenza, come risulta dall' equazione $o = \frac{r(a-x)-2agx}{a+x}$, ovvero $r(a-x) = 2agx$.

241. *Leva del secondo genere*. Supposte tutte le denominazioni di prima, vogliasi la distanza $AB = x$ della forza F da un tal punto B, che posta in B la resistenza, tutto il sistema sia in equilibrio e si abbia al solito $F . Ap = R \times Bp + G . Cp$. Sarà dunque $AC = Cp = a$, $Bp = 2a - x$, e $2af = r(2a-x) + 2a^2g$; onde I°. $x = \frac{2a(ag+r-f)}{r}$; II°. $f = r + ag - \frac{rx}{2a}$. 18

242. Dunque 1°. dalla prima equazione si impara che in questa leva non sarà mai $f > ag + r$, altrimenti $x(= AB)$ diventerebbe negativo e la resistenza caderebbe fuori di pA: onde *nella leva del secondo genere la forza non è mai più grande della resistenza totale*.

243. Dunque 2°. la quantità della forza necessaria all'equilibrio si ha dalla seconda equazione, ove se $x = o$, cioè se R cada in A, sarà $f = r + ag$; se $x = \frac{2a}{3}$, sarà $f = \frac{2r}{3} + ag$; se $x = a$, cioè se R cada in C, sarà $f = \frac{r}{2} + ag$; se $x = 2a$, cioè se R cada in p, sarà $f = ag$. Può dirsi pertanto in generale che la forza bisognevole all' equilibrio diminuisce a misura che R si accosta a p.

244. Dunque 3°. se sia data $Bp = b$ e sia ignota $Ap = 2z$, avremo $Cp = z$ e $2fz = br + 2gz^2$, onde $f = \frac{br}{2z} + gz$, ove se $z = o$, si ha $f = \frac{br}{o} = \infty$, e se $z = \infty$, si ha $f = \infty g$, cioè tanto nel caso di una leva cortissima o nulla, quanto in quello di una leva lunghissima o infinita, è necessaria per l' equilibrio una forza estremamente grande. Quindi per determinar la lunghezza $Ap = 2z$ della leva onde si abbia l' equilibrio con la minima forza possibile, differenzierò l' equazione $f = \frac{br}{2z} + gz$ ed avrò $\frac{df}{dz} = g - \frac{br}{2z^2} = o$ (L. 878), e quindi $2z = \sqrt{\frac{2br}{g}}$ ed $f =$

18 $\sqrt{2bgr}$, minimo cercato (L. 879); dunque una leva del secondo genere più lunga o più corta di $\sqrt{\frac{2br}{g}}$, non può impiegarsi senza scapito della forza, quando è fissato il punto B della resistenza. Quanto alla densità g che entra nella formula $\sqrt{\frac{2br}{g}}$ della lunghezza della leva, ella si avrà dalla *Tavola delle densità o gravità specifiche* che si è posta al fine di questa Prima Parte.

245. *Leva del terzo genere.* Ritenute tutte le denominazioni di prima, vogliasi la distanza $BA = x$ della
19 resistenza R da un tal punto A, che posta la forza in A, tutto il sistema sia in equilibrio e si abbia come sopra, $F \times Ap = R \cdot Bp + G \cdot Cp$. Sarà dunque $BC = Cp = a$, $Ap = 2a - x$, onde $f(2a - x) = 2ar + 2a^2g$, ed $x = \frac{2a(f - r - ag)}{f}$.

246. Dunque nella leva del terzo genere non sarà mai $f < ag + r$; altrimenti $x (= BA)$ diverrebbe negativo e la forza F sarebbe fuori di pB; onde *questa leva è sempre svantaggiosa alla forza*. Si troverà $f = r + ag$ se A cada in B, come nella leva del secondo genere, ed $f = \infty$ se A cada in p, come nella leva del primo.

Abbiamo gli esempj delle leve del terzo genere nei pedali dell' organo e dall' arpa, nelle calcole dei telaj, in molte specie di filatoj, nelle macchine degli Arrotini, nel braccio umano allorchè stendendosi orizzontalmente, sostiene un peso nella sua estremità ec.; di quelle del secondo genere nei remi e negli alberi delle navi, nelle porte, nei mozzi delle campane, nelle mascelle degli animali ec.; di quelle del primo genere nelle cesoje, nelle tanaglie, nelle morse, nella parte curva dei martelli, e specialmente nella *Bilancia* e nella *Stadera*, due macchine che il quotidiano commercio rende meritevoli d' una particolare attenzione.

Si sa come ordinariamente si fabbrica una bilancia; ma tutti forse non sanno le qualità che debbono accompagnarla affinchè mostri con esattezza e senza molto travaglio il vero peso d' una data merce.

247. I. Primieramente in una perfetta Bilancia l' *ago*
20 Ip normale all' *asta* AB dee conservarsi verticale e l' asta

medesima

medesima dee perciò essere orizzontale non meno quando i *piatti* F, R son vuoti, che quando son caricati da pesi eguali. Supposto dunque, per maggiore universalità, che il centro G di gravità della macchina sia nella normale CG 20
diversa dalla verticale LO, e che pG unisca i centri di moto e di gravità p, G, chiamo f', r' il peso dei piatti F, R e delle lor corde, anelli ec., f la merce che nel piatto F si vuol pesare, r il peso da porsi in R per aver l'equilibrio, g il peso dell'asta AB, e fatta $AB = 2a$, $Bp = x$, $Ap = 2a - x$, dovrà essere nel caso dei piatti vuoti $f' . Ap = r' . Bp + g . Cp$, e nel caso dei piatti caricati da f, r, dovrà aversi $(f + f')\, Ap = (r + r')\, Bp + g . Cp$. Ora se da questa si tolga la prima equazione, resterà $f . Ap = r . Bp$, cioè $2af - fx = rx$ ed $x = \frac{2af}{f + r}$; dunque se $f = r$, come dee esserlo nella bilancia, si avrà $x = a = \frac{AB}{2}$.

248. Dunque 1°. *non può esservi eguaglianza tra il peso e la merce se le braccia* Ap, Bp *della bilancia, non sieno eguali;* e però se caricando i piatti in modo che l'asta s'incurvi, la curvatura delle due braccia non sia la stessa, diverranno esse ineguali e la bilancia mentirà quantunque ben costruita: ma si scuoprirà in generale la frode, sol che si trasporti la merce in R e il peso in F; perchè è chiaro che il peso più grave applicato al braccio più lungo, farà subito sparire l'equilibrio.

249. Dunque 2°. *non è punto necessario che le braccia* Ap, Bp *sieno egualmente pesanti*, e purchè il peso f', r' dei piatti e lor dipendenze produca l'orizzontalità dell'asta AB, *è indifferente per l'equilibrio che il centro* G *di gravità sia in* LO *o in* CG: ma se sia in LO, la bilancia sarà migliore, come vedremo.

250. II. In secondo luogo la perfetta bilancia nè deve esser *pazza* inclinandosi stranamente ad ogni più piccola ineguaglianza tra f ed r, nè deve esser *sorda* mantenendo l'equilibrio tra f ed r sensibilmente ineguali. Ritenute pertanto le denominazioni di sopra, ed aggiunta in F una merce f'' che conduca la bilancia in apb e perciò anche pG in pH, sia l'angolo $Dpa = GpH = n$, il dato $OpG = c$, onde $IpH = 90° - n - c$ e $pHI = HpO$ (L. 414)

20 $= n + c$, $Ap = ap = a$, $pG = pH = h$; ed avremo (L. 744. 745) $Dp = Kp = a \cos n$, $Ip = h \, sen \, (n + c) = h \, (sen \, n \cos c + sen \, c \cos n)$ (L. 614), fatto $R = 1$. Ora nella situazione *apb*, il sistema è per ipotesi in equilibrio; dunque ricordandosi che $f = r$ per la natura della bilancia, si avrà $(f + f' + f'') \, a \cos n = (f + r') \, a \cos n + gh \, (sen \, n \cos c + sen \, c \cos n)$, ma quando $f'' = 0$: la bilancia è in ApB onde $(f + f') \, a = (f + r') \, a + gh \, sen \, c$ (247) e però $gh \, sen \, c = (f' - r') \, a$; dunque sostituendo questo valore nella prima equazione e riducendo, verrà $\frac{sen \, n}{\cos n} \left(= tang \, n \right) = \frac{af''}{gh \cos c} = \frac{f''}{\frac{h}{a} g \cos c}$.

251. Dunque 1°. poichè *tang n* è tanto più grande (supposte tutte l'altre cose eguali) quanto è più piccolo il termine $\frac{h}{a} g \cos c$ (L. 48), e questo è tanto più piccolo quanto a è più grande, *la bilancia* farà tanto più facilmente l'angolo *Apa*, cioè *sarà tanto men sorda, quanto le sue braccia saranno più lunghe*, purchè non s' incurvino.

252. Dunque 2°. se il centro G di gravità cada nell'asta AB, sarà l'angolo $OpG = c = 90°$, $\cos c = 0$ (L. 611), $tang \, n = \frac{af''}{0} = \infty$ (L. 197) ed $n = 90°$ (L. 612), cioè la bilancia con l'aggiunta della più piccola merce f'', traboccherà interamente: si eviterà pertanto questo disordine costruendo la bilancia in modo, che i quattro punti A, *p*, G, B non si trovino insieme in una stessa linea retta. E poichè *tang n* è tanto più piccola quanto *cos c* è più grande (L. 48), *la bilancia sarà tanto men pazza quanto è più piccolo l' angolo* OpG (L. 611): ed ecco perchè si è detto (249) che ella è miglioro quando G cade in LO, e lo vedremo ancor nuovamente.

253. III. Infine se una forza straniera φ urtando nell'asta AB, ne abbia alterata l'orizzontalità, la perfetta bilancia dee subito ricuperarla con la forza stessa φ. Supposto dunque che φ normalmente applicata ad una distanza qualunque $pE = m$, possa tener la bilancia nella situazione *apb* sarà $(f + f') \, a \cos n + \varphi m = (f + r') \, a \cos n + gh \, (sen \, n \cos c + sen \, c \cos n)$, e poichè $gh \, sen \, c = (f' - r') \, a$

(250), sostituendo e riducendo, si troverà $\varphi m = gh \cos c \times \text{sen}\, n$.

254. Dunque poichè φm è tanto più grande quanto è più grande o $\text{sen}\, n$, o $\cos c$, o h, e $\text{sen}\, n$ cresce a misura che cresce o l'angolo D$pa = n$, o il raggio $ap = a$ (L. 611), e $\cos c$ cresce a misura che o cresce il raggio pG $= h$, o scema l'angolo OpG $= c$ (L. 611), *la bilancia ricupererà tanto più facilmente la posizione orizzontale* 1°. *quanto più ne sarà stata rimossa;* 2°. *quanto saranno più lunghe le sue braccia;* 3°. *quanto più sarà* G *vicino ad* LO; 4°. *quanto più sarà* G *lontano da* p.

255. Poco vi è da dire sulla Stadera, la quale per altro se sia ben divisa, riesce più comoda e più durevole della bilancia medesima, perchè logora meno il punto d'appoggio e determina con un solo peso la gravezza di merci diversamente pesanti. Sia f' il peso del *piatto* vuoto F e delle sue dipendenze, f la merce che vuol pesarsi, r il peso del *romano* R, ed il peso dell'asta uniforme Am riunito nel suo centro di gravità C, sia g. Supposto che il romano situato in o faccia equilibrio col piatto vuoto f', e situato in m lo faccia con la merce f, si avrà 1°. $f' . \text{A}p = r . op + g . \text{C}p$; 2°. $(f + f')\, \text{A}p = r . pm\, (= r . po + om) + g . \text{C}p$. Sottratta la prima equazione dalla seconda, si trova $f . \text{A}p = r . om$, ed $f = \frac{r . om}{\text{A}p}$. 21

256. Dunque 1°. diviso il *braccio* om in n parti eguali $oi = ik = kl$ ec. $= \text{A}p$, sarà $ok = 2\text{A}p$, $ol = 3\text{A}p$ ec.; e in generale $om = n\text{A}p$, onde $f = \frac{r . om}{\text{A}p} = nr$.

257. Dunque 2°. se il romano pesi una libbra, e posto in k faccia equilibrio con f, sarà $r = 1$, $n = 2$ ed $f = nr = 2^{\text{lib.}}$; se il romano pesi due libbre, e posto in l faccia equilibrio con f, sarà $r = 2$, $n = 3$ ed $f = nr = 6^{\text{lib.}}$ ec.

258. Dunque 3°. moltiplicando le divisioni di om, potrà pesarsi qualunque parte ancor minima della libbra: ma non pesandosi comunemente nella stadera merce alcuna minore dell'oncia, se sia $r = 1$, basterà divider ciascuno spazio oi, ik, kl ec. in 12 parti eguali; se sia $r = 2$, diviso primieramente in mezzo ciascuno spazio oi, ik, kl ec., si dividerà poi ciascuna metà in 12 parti eguali ec.

Puleggia :

259. La Puleggia o è *fissa* o è *mobile*. La fissa è u-
22 na leva del primo genere il cui punto d'appoggio è in p,
la resistenza in R, la forza in F: onde poichè Ap è sempre normale alla tangente AF (L. 411), si avrà sempre in caso d'equilibrio, $F . Ap = R . Bp$ (235): ma $Ap = Bp$; dunque $F = R$, cioè *la puleggia fissa non apporta alcun vantaggio alla forza e serve solo a cangiarne la direzione*.

260. Non così quando la puleggia è mobile; allora ella diviene una leva del secondo genere, il cui punto d'ap-
poggio B ove è fissata la fune, si riferisce al punto di con-
23 tatto in p, la resistenza verticale r a cui dee sempre aggiungersi il peso della puleggia, è in R, e la forza obliqua o verticale f è in F. Condotti dunque il raggio Cp, la corda pA ai punti di contatto A, p e la normale pE sulla direzione FE della forza, i triangoli rettangoli simili CpD, ApE (L. 418) daranno $Cp : pD :: Ap : pE$, e fatto $Cp = a$, l'angolo $pCD = pAE = x$, e però $Ap = 2 \, sen \, x$ (L. 608) posto il raggio $R = a$, la condizione dell'equilibrio esige (235) $f : r :: pD : pE :: Cp \, (a) : Ap \, (2 \, sen \, x)$, onde $f = \frac{ar}{2 \, sen \, x}$. Se ora per aver la forza minima si differenzj quest' equazione, verrà (L. 848) $\frac{df}{dx} = \frac{- \, ar \, cos \, x}{2 \, sen^2 \, x} = 0$, e perciò 1°. — $cos \, x = 0$ che è un minimo (L. 879), onde $x = 90°$ (L. 611), cioè *la forza è minima nella puleggia mobile quando l'angolo* pCD *è retto;* allora $sen \, x = a$, $f = \frac{r}{2}$, e le funi Bp, FA son parallele alla direzione della resistenza: 2°. $sen^2 \, x = 0$ ovvero $sen \, x = \frac{Ap}{2} = 0$, massimo che dà $f = \frac{ar}{0} = \infty$, cioè divenendo piccolissima o nulla la leva Ap, è necessaria per l'equilibrio una forza grandissima o infinita, come appunto trovammo nella leva del secondo genere (244). Quindi la puleggia mobile favorisce la forza finchè Ap non diventa il lato dell'esagono, nel qual caso abbiamo $Ap = 2 \, sen \, x = a$ (L. 456) ed $f = r$: da questo punto in giù l'equilibrio esige una forza sempre più grande della resistenza.

 FIG.

261. Dunque 1°. in un sistema di puleggie mobili ove ciascuna è sostenuta da una distinta fune in tal guisa che fa figura e di resistenza riguardo alla superiore, e di forza riguardo all' inferiore, chiamate r'', r', r le resistenze o forze in R'', R', R e posti a'', a', a i raggi delle puleggie e $2\,sen\,x''$, $2\,sen\,x'$, $2\,sen\,x$ le corde degli archi circondati dalla fune, avremo in caso d' equilibrio (260) 24

$f = \frac{a''r''}{2\,sen\,x''}$, $r'' = \frac{a'r'}{2\,sen\,x'}$, $r' = \frac{ar}{2\,sen\,x}$, onde $f = \frac{a''r''}{2\,sen\,x''}$ $= \frac{a''a'r'}{4\,sen\,x''\,sen\,x'} = \frac{a''a'ar}{8\,sen\,x''\,sen\,x'\,sen\,x}$. Quindi se le funi sieno parallele alla direzione della resistenza, e perciò $sen\,x = a$, $sen\,x' = a'$, $sen\,x'' = a''$ (260), verrà $f = \frac{r}{8} = \frac{r}{2^3}$, cioè in generale *quando in questo sistema le funi son parallele, la forza sta alla resistenza come l' unità a quella potenza di 2 che ha per esponente il numero delle puleggie mobili*.

262. Dunque 2°. in un sistema orizzontale di puleggie mobili ove ciascuna è sostenuta da una fune medesima, e portando insieme col nodo R' una porzione R'''', R''', R'', del peso $R = r$, fa solamente figura di resistenza, è manifesto che nel caso d' equilibrio, la fune dee per tutto esser tesa egualmente, e perciò le forze F, F', F'' ec. debbon tutte eguagliarsi tra loro. Ritenute pertanto le solite denominazioni, avremo (260) $F = \frac{a''R''''}{2\,sen\,x''}$, $F' = F'' = \frac{a'R'''}{2\,sen\,x'}$, $F''' = F'''' = \frac{aR''}{2\,sen\,x}$, ed $F''''' = R'$ (259), ovvero poichè $F = F' = F''$ ec. $= f$, sarà $\frac{2f\,sen\,x''}{a''} + \frac{2f\,sen\,x'}{a'} + \frac{2f\,sen\,x}{a} + f = R'''' + R''' + R'' + R' = R = r$. Quindi se le funi sieno parallele al solito, e però $sen\,x'' = a''$, $sen\,x' = a'$ ec., si troverà $f = \frac{r}{7}$, cioè *quando in questo sistema le funi son parallele, la forza sta alla resistenza come l' unità al numero delle funi che sostengono il sistema mobile*. 25

263. Vale la legge stessa anche per un sistema verticale di puleggie mobili: ma allora i diametri delle puleg-

26 gie debbono esser necessariamente ineguali, e se le funi si vogliano parallele alla direzione della resistenza, bisogna che questi diametri crescano in una progressione aritmetica la cui differenza sia il diametro della puleggia minima.

Argano.

L'Argano o sia perpendicolare all' orizzonte, o gli sia parallelo (nel qual caso più propriamente si chiama *Burbera*) è sempre una leva del primo genere, il cui punto d' appoggio p, p', p'' ec. è in tutto l' asse CE del cilindro
27 pB, la forza è nell' estremità D del raggio pD, e la resistenza è nell' estremità B del raggio pB in cui si intende compreso anche il raggio della fune BR.

264. Poichè dunque la connessione e la solidità delle parti tutte dell' argano manifestamente riunisce insieme quanto all' effetto, i punti p, p', p'' ec., si avrà l' equilibrio in questa macchina, subitochè le normali condotte dal punto d' appoggio p sulle direzioni della resistenza R e della forza F, saranno inversamente come F ad R (235). Ora la normale sulla direzione verticale BR è il raggio orizzontale $p\text{B} = a$, e la normale sulla direzione DF che è sempre tangente al circolo, è il raggio $p\text{D} = \text{A}$; dunque $f : r :: a : \text{A}$, e però $f = \frac{ar}{\text{A}}$, cioè *la forza nell' argano sta alla resistenza, come la somma dei raggi del cilindro e della fune al raggio del circolo o ruota* GKD.

265. Chi deducesse di quì che l' effetto di questa macchina può dunque aumentarsi indefinitamente sol che si accorci il raggio Bp e si allunghi il raggio pD, ragionerebbe bene per l' equilibrio, ma si ingannerebbe sul movimento, e trascurerebbe il mezzo più semplice e più sicuro di provvedere al bisogno. Primieramente il massimo effetto possibile, per esempio la celerità della resistenza R, non può ottenersi nell' argano ed anche in altre macchine, se i raggi pD, Bp non abbian tra loro una proporzione determinata. Infatti posta c la celerità ed mc l' espressione della forza f, è chiaro che ella perderà nell' equilibrio (232) tanta celerità x o tanta forza mx, quanta è la contraria celerità z o forza $m'z$ della resistenza r (16), onde se venga a muoversi, avrà la sola celerità $c - x$: ma mentre il raggio pD con la celerità $c - x$ della forza, fa

 FIG. 27.

un giro Π, il raggio pB con la celerità z della resistenza ne fa uno π; dunque per la natura del moto uniforme (22) quale dee essere il moto delle macchine (227), $c - x : z :: \Pi : \pi :: A : a$ (L. 508), e $z = \frac{a(c-x)}{A}$: ma la forza mx per ipotesi fa equilibrio alla resistenza $m'z = \frac{am'(c-x)}{A}$; dunque (264) $A \cdot mx = a\frac{am'(c-x)}{A}$, $x = \frac{a^2 m' c}{A^2 m + a^2 m'}$ e $z = \frac{Aacm}{A^2 m + a^2 m'}$ che deve essere un massimo. Differenziando pertanto, presa a per variabile, avremo $\frac{dz}{da} = \frac{(A^2 m + a^2 m')Acm - 2am' \cdot Aacm}{(A^2 m + a^2 m')^2} = 0$, onde $A^2 m = a^2 m'$, massimo cercato (L. 879), da cui si ottiene $a = A\sqrt{\frac{m}{m'}}$, cioè allora la resistenza si muoverà con la massima celerità, quando il raggio pD stia al raggio pB come la radice di m', massa della resistenza, alla radice di m, massa della forza.

266. In secondo luogo il raggio pD, ingrandito oltre certi limiti, può render la ruota DG interamente disadatta al maneggio; ed il raggio Bp oltre certi limiti impiccolito, può togliere al cilindro Kp'' la necessaria solidità: perciò qualor si volle dall' argano un più valido effetto, piuttosto che alterarne le dimensioni ordinarie, gli si aggiunse o un sistema di pulegge, o una nuova ruota col suo rocchetto. Ecco per altro una via più spedita per aumentar l' efficacia di questa macchina. Situato l' argano e fissata una puleggia superiormente al punto ove dee giungere il peso R, si sospenda egli al gancio d' una puleggia mobile, e la fune che lo attraversa, si conduca alla puleggia fissa: e già senza aver cresciute difficoltà nel movimento, si sarà con ciò raddoppiata, quando le funi sieno parallele, l' azion della forza (260), ed avremo $f = \frac{ar}{2A}$ (264). Or se dalla puleggia fissa si richiamasse la fune al cilindro, e gli si adattasse di modo, che ella venisse a svolgersi mentre dall' altro capo vi si ravvolge e solleva la resistenza: è manifesto che il movimento riuscirebbe illusorio, giacchè dal cilindro di uniforme diametro

27 tanta fune si svolgerebbe per una parte, quanta se ne avvolgesse per l' altra; dunque se alla parte di esso, dalla quale si svolge la fune, diasi in vece di a un minor diametro a', allora avvolgendosi al solito sul più grosso la circonferenza $2a\pi$ della fune, si svolgerà dal più sottile la circonferenza $2a'\pi$, e la resistenza o peso R ad ogni rivoluzione, salirà quanto comporta la differenza $2a\pi - 2a'\pi$ delle due circonferenze, o $a - a'$ dei due raggi. Con questa combinazione pertanto, e col solo ben piccolo incomodo d' una fune più lunga dell' ordinario, si trasforma a in $a - a'$ nella formula $f = \frac{ar}{2A}$, e l' equazion dell' equilibrio diventa $f = \frac{(a-a')r}{2A}$: macchina sì vigorosa, che supposte $A = 6$, $a = 5$, $a' = 2$, $r = 2000^{lib.}$, laddove la costruzion primitiva (264) richiederebbe una forza superiore ai $\frac{4}{5}$ della resistenza, basta ora per l' equilibrio che ella ne sia solamente $\frac{1}{4}$.

267. Se verso C all' opposta estremità del cilindro si fissasse un' altra ruota in dimensioni ed in forze eguale alla prima, si raddoppierebbe l' effetto: e se in luogo delle forze F esteriormente applicate, si facessero camminar degli uomini nel *Tamburo* di queste ruote, non sarebbe difficile di trovar la condizione dell' equilibrio. Imperocchè sia GuH il quadrante della ruota in cui camminano per esempio 3 uomini u, u', H, che suppongo tutti in eguali distanze Gu, uu', u'H e presso a poco d' un' egual massa o peso $u = u' = H = 150^{lib.}$: riferendo ai punti m, m' delle verticali um, $u'm'$ l' azione del loro peso u, una parte u della forza f sarà alla distanza mp dal punto p d' appoggio, un' altra parte u alla distanza $m'p$, e l' ultima u alla distanza Hp; dunque la richiesta condizion d' equilibrio per una ruota darebbe $u(mp + m'p + Hp) = r . Bp$ (235), onde per le due ruote insieme si avrà $r . Bp = 2u . (mp + m'p + Hp)$: ma $Gu = uu' = u'H = \frac{90°}{3} = 30°$, e però fatto $R = 1$, viene $mp = pu . sen\, 30°$, $m'p = pu' \times sen\, 60°$ (L. 644); dunque $r . Bp = 2u . Hp\, (sen\, 30° + sen\, 60° + 1)$, ovvero $ar = 300\, A\, (sen\, 30° + sen\, 60° + 1)$, cioè i sei

sei uomini faranno equilibrio ad una resistenza $r = \frac{300A}{a}$ $(sen\,30° + sen\,60° + 1) = \frac{300A}{a}\left(\frac{1 + cot\,15°}{2}\right)$ (L. 666).

268. Le *Ruote Dentate* sono un sistema d'argani, ove la resistenza R sospesa al cilindro B, non è più sostenuta da una forza applicata alla ruota F″ come nell' argano, ma da un *rocchetto* R′ che la *ingrana*, e la resistenza R′ non è più sostenuta da una forza posta in F′, ma da un nuovo rocchetto R″ che pur la ingrana ec.: cosicchè supposti A, A′, A″ i raggi delle ruote, a, a', a'' quelli dei rocchetti, ed r'', r', r le resistenze o forze in R″, R′, R, avremo nel caso dell' equilibrio (264) $f = \frac{ar''}{A}$, $r'' = \frac{a'r'}{A'}$, $r' = \frac{a''r}{A''}$, onde $f = \frac{aa'r'}{AA'} = \frac{aa'a''r}{AA'A''}$, cioè *nelle ruote dentate la forza sta alla resistenza come il prodotto di tutti i raggi dei rocchetti al prodotto di tutti quelli delle ruote*. 28

269. Considerando ora questo sistema in movimento, sia N il numero dei denti della ruota F″ da cui suppongo che il moto cominci, ed n il numero dei denti o *ali* del rocchetto R′: è chiaro che mentre F″ fa un giro, R′ e perciò anche F′, ne farà un numero $\frac{N}{n}$ (L. 32. 2°): del pari se N′, n' sieno i denti e le ali di F′, R″, mentre F′ farà un giro, R″ ne farà un numero $\frac{N'}{n'}$. Ora se 1 giro di F′ ci dà per R″ i giri $\frac{N'}{n'}$, quanti giri x ci daranno i giri $\frac{N}{n}$? cioè $1 : \frac{N'}{n'} :: \frac{N}{n} : x = \frac{NN'}{nn'}$; dunque per la natura del moto uniforme (22. 227), *la celerità della prima ruota* F″ *sta a quella dell' ultimo rocchetto* R″ $:: 1 : \frac{NN'}{nn'} :: nn' : NN'$, o in generale *come il prodotto del numero dell' ali di tutti i rocchetti, al prodotto del numero dei denti di tutte le ruote*. Ecco qualche applicazione di questa dottrina.

270. I. Date le ruote F″, F′ e i rocchetti R′, R″ trovare un tal numero di denti per quelle, o di ali per questi, che mentre F″ fa un giro, R″ ne faccia 60. Si avrà

28 dunque $x = \frac{NN'}{nn'} = 60$, e poichè N, N', n, n' son tutte indeterminate, pongo nn' eguale ad un numero composto di due fattori talmente proporzionati alla data grandezza de' due rocchetti R', R'', che possa ciascun fattore esprimere il numero delle loro ali: per esempio, fatto $nn' = 7 \cdot 8 = 56$, sarà $\frac{NN'}{7 \cdot 8} = 60$ e quindi $NN' = 56 \cdot 60$; dunque i numeri $N = 60$, $n = 8$, $N' = 56$, $n' = 7$ soddisfaranno al problema.

271. II. Costruire un sistema di ruote dentate in modo, che l' ultimo rocchetto faccia un giro in 12 ore mentre la prima ruota lo fa in un anno. Supposti tre rocchetti e tre ruote, poichè un giro della prima ruota dà per l'ultimo rocchetto i giri $\frac{NN'N''}{nn'n''}$, ed uno di questi si fa in 12 ore, mentre tutti debbon farsi in un anno o in $8765^{or}\frac{49}{60}$, si avrà $1 : 12 :: \frac{NN'N''}{nn'n''} : \frac{525949}{60}$, ovvero $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. Ora è ben vero che fatto $nn'n'' = 720$, questo numero potrebbe risolversi in tre fattori, come 8, 9, 10 ovvero 6, 10, 12, adattati all' ali dei tre rocchetti: ma allora si avrebbe $NN'N'' = 525949$, e questo numero non dà tre fattori egualmente proprj per i denti delle tre ruote. Convien dunque ricorrere ad una approssimazione, e poichè $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720} = 730\frac{349}{720}$, pongo $\frac{349}{720} = \frac{B}{A}$ (L. 58), e trovate le approssimazioni $\frac{1}{2}, \frac{15}{31}, \frac{16}{33}, \frac{111}{229}$, veggo che niuno dei denominatori può risolversi in tre fattori. Riduco pertanto il rotto in decimali, e con $\frac{349}{720} = \frac{4847}{10000} = \frac{B}{A}$, ottengo l' approssimazioni $\frac{1}{2}, \frac{15}{31}, \frac{16}{33}, \frac{95}{196}, \frac{306}{817}$, ove $196 = 4 \cdot 7 \cdot 7$. Fatto dunque $A = nn'n'' = 196$, $B = 95$, viene $730\,A + B = NN'N'' = 143175 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 83$, onde $\frac{NN'N''}{nn'n''} =$

$\frac{3.5.5.23.83}{2.2.7.7} = \frac{2.3.5.5.23.83}{2.2.2.7.7} = \frac{50.69.83}{7.7.8}$, numeri egualmente proprj e per i denti delle tre ruote e per l'ali dei tre rocchetti, senza che l'approssimazione pregiudichi all'esattezza; poichè dovendo essere $8765^{gr}, 49' = \frac{12NN'N''}{nn'n''}$ e si trova $\frac{12NN'N''}{nn'n''} = \frac{12.50.69.83}{7.7.8} = 8765^{gr}, 48', 58'', 46'''$, onde la durata dell'anno appena differirà di $1''\frac{1}{2}$ dal moto della prima ruota che lo rappresenta.

Piano Inclinato.

272. Dopo che si sa (132) che nel Piano Inclinato la resistenza o gravità g si cangia in $\frac{ag}{\lambda}$, e che necessariamente $\lambda (= AD) > a (= AB)$ e perciò anche $g > \frac{ag}{\lambda}$, dee riguardarsi per dimostrato che è questa una macchina tanto più vantaggiosa alla forza, quanto più vi è diminuita l'energìa della gravità. Consideriamo dunque il piano inclinato in questo aspetto, e supposto ciò che già ne abbiamo detto (132 ec.), terminiamo di farne conoscere le proprietà. 29

273. Posta $\lambda = AD$ lunghezza del piano, $n = ADB$ *angolo d'elevazione* del piano sull'orizzonte, e $z = GFC$ *angolo d'inclinazione* della forza F sul piano stesso AD, sarà l'altezza $AB = a = \lambda\ sen\ n$, e la base $BD = b = \lambda\ cos\ n$ (L. 644. 645.); e se in primo luogo sia $n = 0$, avremo $sen\ n = 0$, $cos\ n = 1$, $AB = a = 0$, e $BD = \lambda = AD$, cioè il piano inclinato AD coinciderà con l'orizzontale BD. Ora è evidente che per aver l'equilibrio in questo caso, l'azione del piano BD non solo deve almeno eguagliare, ma anche direttamente opporsi all'azione della gravità che sollecita al moto il centro C ove è riunito tutto il peso del corpo (110); e poichè la gravità lo sollecita per la verticale o *linea di direzione* CM, il piano BD lo dee sostenere oppostamente per la linea stessa MC, cioè *l'equilibrio sopra un piano orizzontale esige che la linea di direzione* CM *passi per qualche punto* M *della ba-*

29 *se o effettiva o virtuale con cui il corpo si appoggia al piano* BD. Così una muraglia o una torre tuttochè pendenti, non caderanno finchè la loro linea di direzione effettivamente si appoggierà sui fondamenti, nè caderà un uomo o una sedia finchè la linea di direzione passando o per taluno dei lati che uniscono i loro piedi, o per lo spazio che quei lati racchiudono, virtualmente si appoggierà sulla base dell' uomo o della sedia. Del resto il piano orizzontale BD è in somma una leva ridotta al suo solo punto d' appoggio M, ove nel caso d' equilibrio la resistenza, cioè la gravità, agisce per CM, e la forza, cioè il piano stesso BD, agisce oppostamente ed egualmente per MC.

274. Ma se il piano AD si stacchi ora da BD e si sollevi, onde l' angolo $ADB = n$ sia una quantità positiva, il punto d' appoggio M passerà in p e farà con la linea di direzione CM l' angolo $MCp = BDA = n$; onde condotte da p sulle direzioni CM della resistenza o gravità $= r$, e CF della forza $F = f$, le normali pb, pa, e preso per raggio $Cp = R$, sarà $pb = sen\, n$, $pa = sen\, pCa = sen\, apF$ (L. 473) $= cos\, z$ (L. 608), e la solita condizion d' equilibrio (235) ci darà $f : r :: pb : pa :: sen\, n : cos\, z$, cioè *nel piano inclinato la forza alla resistenza sta come il seno dell' angolo d' elevazione al coseno dell' angolo d' inclinazione*, e si ha $f = \frac{r\, sen\, n}{cos\, z}$.

275. Dunque 1°., poichè quanto più impiccolisce $sen\, n$ tanto più scema il valor del rotto $\frac{r\, sen\, n}{cos\, z} = f$ (L. 48), *si avrà l' equilibrio nel piano inclinato con una forza tanto più piccola quanto più sarà piccolo l' angolo d' elevazione* $ADB = n$: perciò le scale, le strade montuose ec. son tanto più facili quanto è minore l' angolo della loro elevazione.

276. Dunque 2°. se la direzione FC della forza sia normale alla resistenza CM, cioè parallela alla base BD e perciò $n = z$, sarà $f = \frac{r\, sen\, n}{cos\, n}$; e poichè $sen\, n = \frac{a}{\lambda}$, e $cos\, n = \frac{b}{\lambda}$ (273), si avrà $f = \frac{ar}{b}$, cioè *se nel piano inclinato la forza agisca normalmente alla resistenza, l' una sarà all' altra come l' altezza del piano alla sua base*.

277. Dunque 3°., se per aver la minima forza possibi-

le, si differenzj l' equazione $f = \frac{r\, sen\, n}{cos\, z}$, troveremo $\frac{df}{dz} = \frac{r\, sen\, n\, sen\, z}{cos^2 z} = 0$, e però $sen\, z = 0$, minimo (L. 879) che dando $cos\, z = sen\, p$CF $= 1$ (L. 611), ci insegna che *nel piano inclinato allora è bastante all' equilibrio la più piccola forza* quando l' angolo pCF è retto, cioè *quando la direzione della forza* F *è parallela al piano* AD. 29

278. Dunque 4°., se il corpo C sia tra due piani inclinati ABD, DQX, l' uno o l' altro di essi farà le veci della forza F e ne avrà tutte le proprietà; cosicchè sostenendosi il corpo C dal piano DXQ per mezzo della normale Cp' (132), sarà Cp' la direzion della forza, l' angolo F$'$Dp' sarà il complemento dell' angolo d' inclinazione F$'$, e si avrà come sopra, sen GD$p' = cos\, z$ ed $f = \frac{r\, sen\, n}{cos\, z}$ (274); onde nel caso d' equilibrio si avvererà del piano DXQ tutto ciò che si è trovato della forza F. La teoria della stabilità delle Volte, le quali comunemente si formano con l' unione di più piani inclinati, dipende da questi principj.

279. Dunque 5°., se sia $f = 0$, il corpo sollecitato dalla sua gravità $\frac{ag}{\lambda}$ (132) non potrà riposar sul piano, e o sempre strisciando o prima rotolando e poi strisciando, necessariamente scenderà per AD. Scenderà sempre strisciando, allorchè dentro alla base o effettiva o virtuale del corpo (132) si troverà la forza normale Cp che sostenuta e conseguentemente distrutta dal piano, lascierà il corpo all' impulso della sola forza CH che lo farà strisciar per la sua parallela AD. Ma se Cp cada fuor della base o effettiva o virtuale, il corpo sollecitato dalle due forze insieme, scenderà rotolando finchè una nuova situazione non faccia cader Cp entro ai limiti della sua base, dopo di che continuerà strisciando, la sua discesa. Tutto ciò è evidente, e se una sfera, un poliedro regolare ec. che dovrebbero sempre strisciare, si aggiran sempre scendendo, è questo l' effetto talor dell' attrito e talora della reazione della percossa, cagioni straniere da cui quì prescindiamo.

280. Si concepisca ora che il piano ABD si rivolga intorno ad un cilindro EA la cui circonferenza eguagli esattamente la base BD; è chiaro che l' orlo AD formerà

29 una *spira* la quale cangierà il cilindro in una *Vite*; di modo che se molti piani eguali ad ABD e ravvolti come il primo, si uniscano insieme lungo AE, la vite avrà tante spire quanti sono i piani riuniti, e la distanza tra spira e spira o il *pane della vite* sarà costantemente AB: perciò sarà vero di tutta la vite quanto lo è d' una sua spira AD e d' un suo pane AB.

281. Ora ciò che quì tende a scendere per la lunghezza del piano o per la spira AD, non è più un corpo qualunque C, ma una *Madrevite* $R' = r'$, la quale o debba
30 comprimere un corpo o innalzarlo, fa sempre figura d'una resistenza riguardo alla forza F, e di una forza riguardo alla resistenza R. Come resistenza, ha il punto d' appoggio per tutto l' asse pV del cilindro da cui è distante del raggio $pR' = c$, mentre la distanza della forza $F = f$ dallo stesso punto d' appoggio p, è la leva $pF = h$; sarà dunque un argano, e per l' equilibrio si avrà (264) $f = \frac{cr'}{h}$. Come forza, ha la direzione parallela alla base BD
29 del piano inclinato, ciò esigendo la natura del cilindro che ella abbraccia, ed intorno a cui tende ad aggirarsi: onde nel caso medesimo d' equilibrio, si avrà (276) $r' = \frac{ar}{b}$. Sostituito questo valore nella prima equazione, viene $f = \frac{acr}{bh}$: ma $b = BD$ che è la circonferenza del cilindro pV,
30 il cui raggio $pR' = c$ (280); dunque $b = 2c\pi$ (L. 520), ed $f = \frac{acr}{2ch\pi} = \frac{ar}{2h\pi}$, cioè *nella vite la forza sta alla resistenza come il pane* a *della vite alla circonferenza* $2h\pi$ *descritta dal raggio o leva* $Fp = h$. Perciò si avrà l' equilibrio nella vite con una forza tanto più piccola, quanto ne sarà più corto il pane e più lunga la leva. È manifesto che se fosse immobile la madrevite R' e tendesse a muoversi la vite pV, sarebbe necessaria la medesima forza, e l' equilibrio si esprimerebbe con la stessa equazione.

31 282. Dopo ciò, nulla di più facile che il trovar l' equilibrio nella *Vite infinita*, ove i denti della Ruota R'' fanno figura di madrevite; poichè chiamando h il raggio Fp della leva, c il raggio del cilindro a cui è unita, n il raggio $R''p'$ della ruota dentata, m il raggio $R'p'$ del rocchetto, f la forza in F, ed r'', r le resistenze in R'', R,

 FIG.

si avrà come sopra (264) $r'' = \frac{mr}{n}$; dunque $f\left(=\frac{ar''}{2h\pi}\right)$ (281) $=\frac{amr}{2hn\pi}$, cioè *nella vite infinita la forza sta alla resistenza come il prodotto del pane* a *della vite nel raggio* m *del rocchetto, al prodotto del raggio* n *della ruota dentata nella circonferenza* $2h\pi$ *descritta dalla leva*.

283. Supponghiamo infine che il piano inclinato ABD si raddoppi, e divenuto ADC, tenda con una forza BE normale ad AC, a disgiungere i due cilindri M, N che in virtù dei pesi R′, R″ starebbero strettamente uniti insieme: sarà dunque ADC un *Cuneo*, macchina volgarmente chiamata *Bietta* o *Zeppa*, ove in caso d'equilibrio la porzione $\frac{f}{x}$ della forza totale BE $=f$, è impiegata a distrugger la porzione $R' = \frac{r}{z}$ della total resistenza $R' + R'' = r$, e l'altra porzione $\frac{(x-1)f}{x}$ a distrugger l'altra porzione $R'' = \frac{(z-1)r}{z}$. Ora 1°. se la gravità o resistenza $R' + R''$. agisca nella direzione MN normale alla forza BE, posto il *semidorso* AB $=$ BC $= d$ e l'altezza BD $= a$, il piano ABD ci darà (276) $\frac{f}{x} = \frac{d.\frac{r}{z}}{a} = \frac{dr}{az}$, e l'altro CBD darà del pari $\frac{(x-1)f}{x} = \frac{dr(z-1)}{az}$; onde sommando le due equazioni avremo $f = \frac{dr}{a}$ per l'effetto totale, cioè *la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo isoscele sta alla resistenza che agisce per* MN *normale a* BD, *come il semidorso* d *all' altezza* a: 2°. ma se la gravità o resistenza $R''' + R''''$ agisca nelle direzioni MB, NB normali alle lunghezze o *lati* AD $= \lambda$, CD $= \lambda'$ del cuneo, sia egli isoscele o sia scaleno, allora i piani AD, CD normalmente premuti da MB, NB dovranno considerarsi come orizzontali (273), e in caso d'equilibrio converrà risolver BE $=f$ nelle due BM, BN opposte ed eguali alle due resistenze MB $= R'''' = \frac{r}{z}$ ed NB $= R''' = \frac{(z-1)r}{z}$ (273); 32

FIG. 32 onde compito il parallelogrammo BMEN, i triangoli EBM; EBN, simili a CAD (L. 435), daranno $f : \frac{r}{z} :: 2d : \lambda$ ed $f : \frac{(z-1)r}{z} :: 2d : \lambda'$, e quindi $\frac{r + (z-1)r}{z} = \frac{f\lambda + f\lambda'}{2d}$ ovvero $f = \frac{2dr}{\lambda + \lambda'}$, cioè *la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo sta alla somma delle resistenze che agiscono normalmente sui lati* AD, CD, *come il dorso* 2d *alla somma de lati* $\lambda + \lambda'$. Perciò il cuneo sarà tanto più favorevole alla forza, quanto $2d$ sarà più piccolo di $\lambda + \lambda'$ o quanto sarà più acuto l' angolo ADC.

284. La proprietà del cuneo ritrovata nel primo caso, si applica con successo alla compressione dei corpi, perchè allora la resistenza è parallela al dorso AC o normale alla forza BE: ma se la proprietà ritrovata nel secondo caso voglia applicarsi alle scuri, all' asci, alle pialle, agli scarpelli, alle vanghe, ai chiodi, agli aghi, ai raroj, ai coltelli ec., e in generale a tutti quegli strumenti che servono a dividere i corpi o a discostarne le parti, rare volte si vedrà la pratica accordarsi con la teorìa, ed attesa la natura e la disposizione estremamente varia delle fibre materiali, non accaderà forse mai che imprimendo una medesima forza ad un medesimo cuneo, si abbia in due diverse materie un medesimo risultato.

Attrito dei corpi e Rigidezza delle funi.

285. L' utilità dell' Attrito nell' arti meccaniche e negli usi ordinarj della vita, è bilanciata anche troppo dai molti danni che egli cagiona a tutte le macchine in generale, e a quelle specialmente che sono il frutto d' un maggiore ingegno e d' una più studiata combinazione. Se per suo mezzo si conducono a pulimento i metalli, gli specchi, i diamanti; se le raspe, le lime, le seghe ricevono da lui tutta la loro azione; se gli animali medesimi gli son debitori della forza e della sicurezza con cui si appoggiano sul terreno movendosi: il consumo che egli fa dei varj pezzi d' una macchina, delle forze che vi si applicano, e del moto da esse prodotto, la differenza stupenda che per

sua

sua cagione si trova tra gli effetti delle macchine modellate in piccolo ove è quasi insensibile, e quelli delle macchine stesse eseguite in grande ove si aumenta oltre misura; gli sbagli enormi e dispendiosi a cui espone i Meccanici allorchè bastantemente non ne valutano l'influenza: tuttociò lo rende in pratica tanto più pericoloso e nocivo, quanto è men facile di prevederne tutte le conseguenze, e di soggettarlo ad un calcolo rigoroso.

286. I mezzi di diminuirlo sono assai noti: siccome egli nasce dalla resistenza che convien superare allorchè un corpo si vuol muover sopra di un altro (17), e questa è cagionata dall'adesione scambievole delle piccole punte e cavità dei due corpi, è certo che l'attrito sarà distrutto in gran parte e dal pulimento accurato delle superficie, che ne scema le sinuosità e l'asprezze, e dall'interposizione di materie grasse ed untuose, che riempiono i vuoti e pareggiano l'ineguaglianze, e soprattutto dalla combinazione di corpi eterogenei i cui pori e prominenze avendo tra loro assai meno di proporzione e d'affinità, che le prominenze ed i pori dei corpi omogenei, debbono anche molto meno impegnarsi scambievolmente. Per altro ad onta di tali mezzi, resta sempre in qualunque macchina una porzione d'attrito che non è sperabile di calcolar mai con esattezza; poichè i gradi di temperatura e d'umidità dell'atmosfera, le fibre più o meno flessibili dei differenti corpi, la maggiore o minore attrazione delle molecule materiali, la pressione, la grandezza, la direzione e la celerità delle superficie che sfregano, son tutti elementi essenziali che dovrebbero entrare in calcolo, e che attesa la loro estrema variabilità ed incertezza, non potranno entrarvi giammai. L'esperienza medesima non si accorda quì con se stessa, e sembra avvertirci tacitamente che in ciascun caso particolare, data una macchina e fissato con le regole stabilite di sopra, il rapporto tra la forza e la resistenza, è necessario di conoscere con un esperimento immediato quanta forza per vincer l'attrito si debba aggiungere a quella che la teorìa prescriverebbe: le lunghe discussioni dei Matematici sull'attrito son piuttosto degli sforzi ingegnosi che delle verità d'un uso universale e sicuro.

287. Abbiansi dei piani AD e dei solidi C di varie materie più e men levigate, e si ponga sopra un piano AD 29

FIG. il solido C di cui vuol determinarsi l' attrito. Si sa che
29 se questo attrito fosse zero, alzato appena il piano AD sull' orizzontale BD, e scostata anche minimamente la normale Cp dalla linea di direzione CM, il corpo C non potrebbe riposar sopra AD e necessariamente scenderebbe (279); dunque se egli riposi ad onta dell' innalzamento di AD, il suo riposo dovrà tutto attribuirsi all' attrito, che sarà perciò tanto più grande, quanto più potrà (salvo l' equilibrio o riposo di C) differire o il piano orizzontale BD dall' inclinato AD, o la normale Cp dalla direzione CM, o l' angolo retto CpA dall' obliquo CGA, che per questo appunto si chiama *angolo dell' attrito*. Quindi poichè alzando il piano AD finchè C sia sul punto di muoversi, delle due forze Cp, CH in cui CG si risolve (132), la prima Cp che dicesi *forza di pressione*, è distrutta dal piano, e l' altra CH lo è dall' attrito, se si chiami a l' attrito, s la pressione, r la resistenza o peso di C, n l' angolo ADB d' elevazione del piano, t l' angolo BAD $=$ CGp d' attrito, avremo $a : r :: CH : CG :: BA : AD :: \lambda\ sen\ n : \lambda$ (273) $:: sen\ n : 1$, cioè l' attrito starà al peso del corpo C come il seno dell' angolo d' elevazione al raggio. Avremo inoltre $a : s :: CH : HG :: 1 : tang\ t$ (L. 646), cioè *l' attrito alla pressione sta come il raggio alla tangente dell' angolo d' attrito*. Onde trovato, per esempio, l' angolo BAD $= CGp = t = 71°, 34'$ (quale si trova infatti in un gran numero di materie mediocremente levigate) si avrà $L \frac{s}{a} = L\ tang\ 71°, 34' = 0,4771621 = L3$ in circa, e però $a = \frac{s}{3}$, cioè l' attrito sarà $\frac{1}{3}$ della pressione: e se si trovi BAD $= 75°, 58'$ o BAD $= 78°, 41'$ ec. (come appunto si trova nelle materie sempre più ridotte a pulimento) verrà presso a poco $a = \frac{s}{4}$, $a = \frac{s}{5}$ ec., cioè l' attrito sarà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ec. della pressione; cosicchè l' attrito eguaglia ora una porzione, ora un' altra della forza premente, e perciò (almeno nelle macchine ordinarie ed in grande) è sempre proporzionale alla pressione, la quale se scemasse, per esempio, della metà, esigerebbe la sola metà dello sforzo che attualmente è necessario al movimento. Intanto si raccoglie generalmente di quì che atteso l' attri-

tò, un corpo C non sarà sul punto di muoversi finchè la risultante CG delle forze Cp, CH non faccia con la base IG di movimento un angolo CGp eguale all'angolo d'attrito. 29

288. Ciò supposto, diamo un saggio della teorìa nell'argano e nel piano inclinato. Mi figuro per maggior semplicità che nell'argano CE la forza F e la resistenza R agiscano presso a poco in un medesimo piano; ne prolungo le direzioni RB, FD finchè convengano in L, e da L conduco Lp al centro p. Poichè dunque la risultante delle due forze LR, LF, che in caso d'equilibrio passerebbe per il punto p d'appoggio e vi sarebbe distrutta (109), supposto l'attrito, fa col pernio CE un angolo $C'IL = t$ (287), si conosceranno nel triangolo pLI i lati $pI = a'$ raggio del pernio, $pL = q$ distanza del centro della ruota dal punto di concorso delle due forze, e l'angolo $pIL = pIC' + C'IL = 90° + t$; onde fatto $pLI = \theta$, si avrà $sen\,\theta = \frac{a'\,sen(90° + t)}{q}$ (L. 636) $= \frac{a'\,cos\,t}{q}$ (L. 618). Chiamando dunque m l'angolo pLF, ed n l'angolo pLR, sarà $FLI = m - \theta$ ed $RLI = n + \theta$: ma LI per ipotesi è la risultante delle due forze $LF = f$, $LR = r$, e perciò $f : r :: sen\,RLI : sen\,FLI :: sen(n + \theta) : sen(m - \theta)$ (97); dunque $f = \frac{r\,sen(n + \theta)}{sen(m - \theta)}$, espressione della forza che in caso d'attrito è necessaria nell'argano per l'equilibrio. 27

289. Dunque 1°, se l'attrito sia zero, avremo (287) $0 : s :: 1 : tang\,t = \infty$ (L. 197) $= tang\,90°$ (L. 612), e però $t = 90°$, $cos\,t = 0$, $sen\,\theta = 0$ (288), $\theta = 0$, ed $f = \frac{r\,sen\,n}{sen\,m}$: ma preso pL per raggio $= R$, si ha $sen\,n = sen\,pLR = pB = a$, e $sen\,m = sen\,pLF = pD = A$ (L. 608); dunque $f = \frac{ar}{A}$, come si è trovato di sopra (264).

290. Dunque 2°., se le direzioni LR, LF sieno parallele, cioè se il raggio $pL\ (= q)$ divenga infinito, sarà $sen(n + \theta) = \frac{sen\,n\,cos\,\theta + sen\,\theta\,cos\,n}{\infty}$, e $sen(m - \theta) = \frac{sen\,m\,cos\,\theta - sen\,\theta\,cos\,m}{\infty}$ (L. 614): ma in generale $cos = R - sen\,ver.$ (L. 622.), onde qui $cos = \infty - sen\,v. = \infty$

(L. 197.6°); dunque $sen(n+\theta) = \frac{\infty\, sen\, n + \infty\, sen\,\theta}{\infty} = sen\, n + sen\,\theta$, e $sen(m-\theta) = sen\, m - sen\,\theta$: ma si trovò (288) $sen\,\theta = \frac{a' \cos t}{q}$ e si ha $sen\, m = \frac{A}{q}$, $sen\, n = \frac{a}{q}$ (L. 642); dunque $f = \frac{r(sen\, n + sen\,\theta)}{sen\, m - sen\,\theta} = \frac{r(a + a'\cos t)}{A - a'\cos t}$.

27 291. Dunque 3°., preso l' angolo $pLI' = pLI$, la risultante in caso d' attrito potrà esser diretta per LI' senza turbar l' equilibrio. Ora come dirigendosi per LI è più svantaggiosa alla forza che se mancasse l' attrito, perchè allora si avrebbe $f = \frac{r\, sen\, n}{sen\, m}$ (289), laddove l' attrito ci dà $f = \frac{r\, sen(n+\theta)}{sen(m-\theta)}$ (288) ed è chiaro che $\frac{n+\theta}{m-\theta} > \frac{n}{m}$: così dirigendosi per LI' favorisce la forza più che se l' attrito sia tolto, perchè fatto il calcolo come sopra (288), si troverà $f = \frac{r\, sen(n-\theta)}{sen(m+\theta)}$ ed è chiaro che $\frac{n}{m} > \frac{n-\theta}{m+\theta}$. Onde dall' ipotesi dell' attrito nascono per la forza F due diversi valori egualmente atti a mantener l' equilibrio, l' uno più grande e l' altro più piccolo del valore che competerebbe ad F, eliminato l' attrito; i quali valori, se LR sia parallela ad LF, divengono $f = \frac{r(a + a'\cos t)}{A - a'\cos t}$, $f = \frac{r(a - a'\cos t)}{A + a'\cos t}$ (290), il primo dei quali ha luogo quando il peso R è sul punto di salire, il secondo quando è sul punto di scendere.

21 292. Dunque 4°., se nella stadera si faccia $pl = A$, $pA = a$, $pu = a'$, avremo come nell' argano, $f = \frac{r(a + a'\cos t)}{A - a'\cos t}$; e se nella bilancia o nella puleggia fissa si

20 e 22 faccia $pA = pB = A = a$, $pu = a'$, avremo del pari $f = \frac{r(a + a'\cos t)}{a - a'\cos t}$.

29 293. Similissimo è il calcolo dell' attrito nel piano inclinato; poichè dal punto C ove la forza e la resistenza

concorrono, condotte CI, CI′ che cadendo entro alla base GI del corpo C facciano l' angolo CID = CI′F = t, saranno esse due risultanti delle forze CF = f, CM = r (287), cioè sarà CI la men vantaggiosa, e CI′ la più favorevole alla forza F (291). Quanto a CI, si avrà come prima, $f : r :: sen$ MCI : sen FCI :: sen (MCp + pCI) : sen (FCp — pCI) :: sen (n + θ) : sen (m — θ), onde 29

$f = \frac{r\ sen\ (n + \theta)}{sen\ (m - \theta)}$, espressione della forza F quando è sul punto di far salire strisciando il corpo C per DA: Quanto poi a CI′, si avrà pur come prima, $f : r :: sen$ MCI′: sen FCI′ :: sen (MCp — pCI′) : sen (FCp + pCI′) :: sen (n — θ) : sen (m + θ), onde $f = \frac{r\ sen\ (n - \theta)}{sen\ (m + \theta)}$, espressione della forza F quando è sul punto di lasciare scendere strisciando il corpo C per AD.

294. Differenziando la prima equazione $f = \frac{r\ sen\ (n + \theta)}{sen\ (m - \theta)}$, presa m variabile per aver, come sopra (277), la forza minima, troveremo $\frac{df}{dm} = \frac{- r\ sen\ (n + \theta)\ cos\ (m - \theta)}{sen^2\ (m - \theta)} = 0$, e però $cos\ (m - \theta) = 0$, minimo che dando $sen\ (m - \theta) = 1$ e perciò $m - \theta = 90°$ (L. 611), ci insegna che se C debba salir per DA, si avrà l' equilibrio con la più piccola forza quando l' angolo FCI = $m - \theta$ sia retto, cioè quando la direzion della forza F prolungata al di là di C verso D, faccia col piano AD un angolo eguale al complemento θ dell' angolo d' attrito; allora $f = r\ sen\ (n + \theta)$.

295. Differenziando del pari la seconda equazione $f = \frac{r\ sen\ (n - \theta)}{sen\ (m + \theta)}$, troveremo egualmente $cos\ (m + \theta) = 0$, minimo che dando $sen\ (m + \theta) = 1$ ed $m + \theta = 90°$, ci insegna che se C debba scendere per AD, la più piccola forza bastante all' equilibrio non si ha più col farne la direzione CF parallela ad AD, come trovammo allorchè si prescindeva dall' attrito (277), ma dirigendola per CF in modo che sia l' angolo CFI′ = θ; infatti essendo FCI′ = $m + \theta = 90°$, si ha necessariamente CFI′ = θ (L. 473); in tal caso $f = r\ sen\ (n - \theta)$.

296. Anche la *Rigidezza delle funi* ha dato luogo ad una piccola regola, che non è per altro più rigorosa e più sicura della teorìa dell' attrito, mentre molti degli elementi, da cui questa rigidezza è cagionata, come la qualità della canapa, lo stato dell' atmosfera, la celerità del movimente ec., sono anch' essi estremamente variabili, e non è possibile di introdurli nel calcolo e di valutarli con precisione. Ecco perciò quel poco che si è fissato su questo proposito dopo che gli artefici troppo servilmente attaccati alla pratica antica, non hanno o potuta o saputa procurare alle funi una flessibilità sufficiente.

297. Sieno D, d i diametri di due funi della medesima specie, cioè egualmente nuove, egualmente torte ec.; sieno A, a i raggi delle ruote o cilindri che esse circondano, P, p i pesi che sostengono, e si voglian determinare le loro rigidezze R, r o le forze F, f che per vincer la rigidezza, dovranno aggiungersi alla solita forza prescritta dalla teorìa. Poichè l' esperienza sembra quasi aver deciso che una fune è tanto più rigida o che vi vuole tanto più di forza a piegarla, 1°. quanto è più grande il suo diametro, 2°. quanto è più piccolo il raggio della ruota o cilindro che ella abbraccia, 3°. quanto è maggiore il peso che ella sostiene; è evidente che le rigidezze R, r delle funi proposte, e perciò le forze F, f occorrenti a piegarle, dovranno esprimersi con la ragion composta diretta dei diametri e dei pesi, ed inversa dei raggi delle ruote o cilindri (L. 264), cioè si avrà $R : r :: F : f :: D \times P \times \frac{1}{A} : d \times p \times \frac{1}{a} :: \frac{DP}{A} : \frac{dp}{a}$.

298. Ecco dei Problemi Meccanici nella cui soluzione potranno gli Studiosi ampiamente esercitarsi.

I. Supposto che due corpi con le celerità $C = 1$, $C' = 3$ si muovano uniformemente sopra due parallele tra lor distanti di $p = 24^{pie.}$, e sieno attualmente ad un intervallo $r = 74^{pie.}$, si cerca 1°. quando il loro intervallo sarà $m = 26^{pie.}$: 2°. quando si troveranno in dirittura: 3°. come possano sciogliersi questi due quesiti se le parallele divengano una sola linea retta: 4°. come si sciolga il Problema se i corpi in luogo di inseguirsi si vengano incontro,

Ris. Chiamato T il tempo in secondi, si troverà; 1°. T $= \frac{\sqrt{(r^2-p^2)} \mp \sqrt{(m^2-p^2)}}{C'-C} = \frac{30''}{40''}$; 2°. T $= \frac{\sqrt{(r^2-p^2)}}{C'-C}$ $= 35''$; 3°. T $= \frac{r \mp m}{C'-C} = \frac{24''}{50''}$, e T $= \frac{r}{C'-C} = 37''$; 4°. se i corpi si incontrino, basterà mutar $\mp$ in $\pm$ e $-$ C in $+$ C; tutti i valori numerici saranno perciò la metà dei già trovati.

II. Una circonferenza è divisa in parti eguali diversamente: 1°. in 5 parti con le cifre rosse 1, 2 ec.: 2°. in 7 parti con le cifre verdi 1, 2 ec.: 3°. in 9 parti con le cifre gialle 1, 2 ec.: 4°. in 315 parti con le cifre nere 1, 2 ec. Quattro mobili V, X, Y, Z si partono insieme dal punto o, ove cominciano tutte le divisioni, e girando per lo stesso verso con moto uniforme e senza urtarsi, trascorrono in 1″ ciascuna delle respettive parti. Cerco ove sarà Z nel momento in cui V è in 3, X in 4, Y in 6, e quanti interi giri della circonferenza avrà fatti ciascun dei mobili. *Ris.* Quando i mobili V, X, Y giungono la prima volta ai luoghi assegnati, Z non ha finito un giro ed è nella divisione 123: ma il primo mobile avrà fatti inoltre 24 giri, il secondo 17, e il terzo 13.

III. Dato che i mobili stessi V, X, Y, Z abbiano respettivamente le celerità C $= 1,2805$, C′ $= 1,242$, C″ $= 1,11$, C‴ $= 1$, determinare il tempo del primo generale incontro di tutti i mobili insieme, e del primo incontro particolare di essi a tre a tre, e a due a due, come pure gli interi giri che dee far ciascuno prima d'incontrarsi la prima volta con gli altri. *Ris.* Il primo generale incontro dei quattro mobili ed anche il primo incontro particolare di essi a tre a tre avviene nei $181'' \frac{9}{11}$ dopo 232 giri di V, 225 di X, 201 di Y e 181 di Z: il primo incontro particolare di V con X avviene nei $25'' \frac{75}{77}$ dopo 33 giri di V e 32 di X: di V con Y nei $5'' \frac{295}{341}$ dopo 7 giri di V e 6 di Y; di V con Z nei $3'' \frac{317}{561}$ dopo 4 giri di V e 3 di Z: di X con Y nei $7'' \frac{19}{33}$ dopo 9 giri di

X e 8 di Y: di X con Z nei $4'' \frac{16}{121}$ dopo 5 giri di X e 4 di Z: di Y con Z nei $9'' \frac{1}{11}$ dopo 10 giri di Y e 9 di Z.

IV. Tra l' istante in cui lasciai cadere un piccol globo di piombo in un pozzo, e l' istante in cui mi giunse all' orecchio il suono della percossa, contai un tempo $\tau = 8''$. Posto che il suono percorra uniformemente $173^{tes.}$ in $1''$, sapreste voi determinar la profondità x del pozzo, e quando l' equazione fosse quadratica, distinguere il valore che scioglie il problema? *Ris.* Chiamando C la celerità del moto uniforme, e g la forza acceleratrice di gravità, si troverà $x = \frac{C}{g}[g\tau + C - \sqrt{(2Cg\tau + C^2)}] = 794^{pie.}$ incirca, poichè il solo valor negativo scioglie il problema.

V. Uno stesso globo trasportato in due diverse Latitudini ha prodotto un eguale sprofondamento in un mucchio di creta sopra cui è caduto. Come dedurreste voi di quì se in queste due Latitudini la forza acceleratrice di gravità sia eguale o ineguale? *Ris.* Se l' altezze da cui il globo è caduto si trovano eguali, lo saranno anche le forze acceleratrici di gravità; in altro caso, queste saranno reciprocamente proporzionali a quelle.

VI. Una bomba lanciata in alto verticalmente, è ricaduta in terra dopo $18''$. A quale altezza si è sollevata? *Ris.* Ad un' altezza $x = 1223^{pie.}, 1$.

VII. Qual' è la celerità iniziale p con cui dovrebbe lanciarsi un corpo verticalmente all' insù, affinchè supposta la volgar legge dell' attrazione (4), trascorresse uno spazio infinito? E se il corpo si fosse lanciato con una infinita celerità, qual celerità χ gli resterebbe dopo aver trascorso uno spazio infinito? *Ris.* Preso il solito raggio medio della Terra (42) si ha 1°. $p = 34434^{pie.}$: 2°. $\chi = \infty$.

VIII. Qual' è la celerità finale c con cui un corpo liberamente cadendo, supposta la stessa legge d' attrazione, giungerebbe alla superficie terrestre dopo aver trascorso uno spazio infinito? *Ris.* $c = 34434^{pie.}$.

IX. Dalle

IX. Dalle estremità d'una data retta verticale partono nell'istante stesso due corpi, l'uno all'ingiù liberamente, l'altro all'insù con una data celerità p. Cerco il loro punto d'incontro. *Ris.* Chiamata a la retta data, ed x la distanza dell'estremità superiore dal punto d'incontro, si trova $x = \frac{a^2 g}{2p^2}$.

X. Due pesi ineguali a, b uniti insieme con una funicella molto flessibile e leggiera, pendono da una puleggia fissa. Cerco quale spazio s percorrerà in un tempo t il più grave a che discende. *Ris.* $s = \frac{gt^2(a-b)}{2(a+b)}$.

XI. Supposti eguali i tempi di due moti qualunque omogenei o eterogenei, trovar la proporzione delle celerità agli spazj. *Ris.* Si avranno dieci combinazioni di moti, e la proporzione si troverà in tutte geometrica.

XII. Trovare il centro di gravità d'un arco cicloidale diviso in mezzo dal suo asse a. *Ris.* $\frac{\int x ds}{s} = \frac{x}{3}$ contando dal vertice, e se si tratti dell'intera cicloide, $\frac{\int x ds}{s} = \frac{a}{3}$.

XIII. Dato un pendolo FM composto di due pesi, l'uno inferiore ed immobile $M = 6^{onc.}$, l'altro superiore e 7
mobile $M' = 288^{onc.}$, trovar nella verga $FM = 4^{pie.}$ un luogo M' tale che fissandovi il peso M', l'oscillazioni del pendolo si facciano in $1''$. *Ris.* Posto $M'F = x$, si troverà $x = 438^{lin.}, 52$ ovvero $x = 1^{lin.}, 86$, onde il problema ha due soluzioni.

XIV. Un pendolo d'una lunghezza λ che essendo ben regolato dovrebbe fare in un certo tempo un numero n di vibrazioni, ne fa un numero $n \pm p$. Quanta sarà la lunghezza $\pm x$ che gli si dovrà aggiungere o togliere per regolarlo? *Ris.* $x = \frac{\lambda p}{n^2}(2n \pm p)$.

XV. Un corpo gira in una data ellisse con una forza che tende al centro di essa. Cerco la legge con cui ope-

ra questa forza. *Ris.* La forza opera in ragion diretta delle distanze.

XVI. Un corpo si rivolge per una parabola o per un' ellisse con una forza che tende al fuoco di esse. Cerco la legge con cui opera questa forza. *Ris.* La forza opera in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

XVII. Due notizie vorrebbe un Bombardiere: 1°. quale sia la più facil maniera di determinar la forza della polvere: 2°. come possa prevenirsi l' intempestivo scoppiar d' una bomba, cosicchè determinata, per esempio, la
13 forza della polvere $a = 370^{tes.}$, trovati gli angoli SBG $= 6°, 12'$, DBG $= 32°, 50'$, e conosciuta la distanza BS $= 564^{tes.}$, la bomba scoppi nell' istante medesimo in cui giunge allo scopo S. Che risponderete? *Ris.* Al primo, che prenda l' ampiezza del tiro nell' orizzontale BG e faccia il tiro sotto un angolo semiretto; con ciò troverà la forza della polvere eguale alla metà dell' ampiezza del tiro. Al secondo, che calcoli il tempo in cui può giunger la bomba allo scopo S e ne regoli la miccia in conseguenza: nel nostro caso si trova il tempo $T = BS . cos\, SBG \sqrt{\left(\frac{t^2 + 1}{2ag}\right)} = 10'', 93$, e tanto dee durar la miccia.

XVIII. Data o la celerità $C = 10^{pie.}$ di circolazione,
7 o l' arco ADM $= 60°$ d' oscillazione, determinar lo sforzo che il corpo umano fa contro la corda FD $= 5^{pie.}$ o contro il punto F di sospensione nel giuoco volgarmente detto *altalena*. *Ris.* Chiamato F' lo sforzo cercato, F la forza motrice di gravità, ed FD $= r$, si troverà $F' = \frac{2aF}{r}$, ove a è l' altezza dovuta o alla celerità C o alla celerità per l' arco ADM: data C, si avrà $F' = \frac{17F}{25}$, e dato ADM, verrà $F' = \frac{67F}{250}$ nel punto D.

XIX. Dall' ipotesi della giornaliera rivoluzion della Terra intorno al proprio asse, potrà egli inferirsi che i corpi situati nell' Equatore fuggiranno dalla superficie del Globo e saranno lanciati per l' atmosfera? *Ris.* Preso il massimo raggio terrestre $r = 19686108$, si trova che i corpi non

potranno mai staccarsi dal Globo se non abbiano un moto 18 volte in circa più grande di quello che hanno nell'ipotesi della rivoluzion diurna.

XX. Situati a contatto in una stessa orizzontale un numero $n = 100$ di globi perfettamente elastici, la cui massa decresca in continua ragion geometrica, determinare e calcolar con esattezza la celerità c' che il primo $M = \frac{2}{3}$ urtando con la celerità $C = 1$ il secondo $m = \frac{1}{3}$, trasmette all' ultimo per mezzo di tutti i frapposti globi in quiete. *Ris.* Si troverà $c' = C\left(\frac{2M}{M+m}\right)^{n-1} = 2338486807711$.

XXI. Supposto $a = 33^{lib.}$ il peso equivalente all' ordinaria forza d' un uomo (227), e dato un peso $b = 25^{lib.}$ che dee innalzarsi per mezzo d' una fune molto flessibile e d' una puleggia fissa di pochissimo attrito, si cerca il peso p che perde l' uomo contro il peso b, e qual peso p' gli resti per continuare il movimento. *Ris.* $p = \frac{2ab}{a+b} = 28\frac{13}{29}$, $p' = \frac{a(a-b)}{a+b} = 4\frac{16}{29}$.

XXII. Data la lunghezza $l = 5^{pie.}$ d' una leva, e la distanza $d = 3^{pie.}\frac{1}{2}$ del punto d' appoggio da una estremità B, trovar la forza x che dall' altra estremità A può fare equilibrio ad un parallelepipedo omogeneo di un peso $r = 300^{lib.}$ situato in B sopra una porzione $u = 2^{pie.}$ della leva. *Ris.* $x = \frac{r(2d-u)}{2(l-d)} = 500^{lib.}$.

XXIII. Una trave lunga $2a = 16^{pie.}$ e pesante $g = 1400^{lib.}$ dee posar nelle sue estremità sopra due mensole A, B e sostenere in distanza di $b = 4^{pie.}$ dal mezzo verso A un pilastro il cui peso $p = 2500^{lib.}$. Si cerca il peso P, Π di cui sarà caricata ciascuna mensola A, B, onde

non si fabbrichi nè troppo massiccia con una spesa superflua, nè troppo debole con pericolo di rovina. *Ris.* $P = \frac{g+p}{2} + \frac{bp}{2a} = 2575^{lib.}$, $\Pi = \frac{g+p}{2} - \frac{bp}{2a} = 1325^{lib.}$.

XXIV. Supposto tutto come nel passato problema, qual sarà il carico delle due mensole A, B se la trave appoggiandosi ad un rialto della mensola A, debba posarvi obliquamente e far con l' orizzonte un angolo $\phi = 30°$? *Ris.* $P = g + p - \frac{(ag + ap - bp)\cos\phi}{2a} = 2753^{lib.}$, $\Pi = \frac{(ag + ap - bp)\cos\phi}{2a} = 1147^{lib.}$.

XXV. Supposta come prima la situazione obliqua della trave, in modo però che avendo ella una prominenza nella sua estremità verso B, possa attenersi alla mensola B, determinare il carico delle due mensole A, B. *Ris.* $P = \frac{p+g}{2} + \frac{bp\cos\phi}{2a} = 2491^{lib.}$, $\Pi = \frac{p+g}{2} - \frac{bp\cos\phi}{2a} = 1409^{lib.}$.

XXVI. Il peso d' una merce nel piatto F d' una bilan-
20 cia falsa si trova r, e nel piatto R si trova r'. Qual è il vero peso x della merce? *Ris.* $x = \sqrt{rr'}$.

XXVII. Si sa che due corpi in equilibrio sopra una puleggia fissa ne aggravano il pernio con la somma dei loro pesi. Supposto dunque che l' un corpo pesi a e l' altro pesi b e che sia $a > b$, onde l' equilibrio non abbia più luogo, si cerca se il pernio sarà aggravato al solito da un peso $p = a + b$. *Ris.* Nò, perchè si troverà $p = \frac{4ab}{a+b}$ che è minore di $a + b$.

XXVIII. In ciascuna delle due ruote d' un argano camminano 6 uomini (267); il raggio delle ruote è di $8^{pie.}$ e quello del cilindro (compreso il semidiametro della fune) è di $6^{pol.}$. Cerco a qual resistenza o peso r faranno equilibrio i 12 uomini. *Ris.* $r = 20630^{lib.}$.

XXIX. Per mezzo dell' antico principio dei Meccanici (232) determinar le condizioni dell' equilibrio nella bur-

bera e nel cuneo isoscele. *Ris.* 1°. $f = \frac{ar}{A}$; 2°. $f = \frac{dr}{\lambda}$, come trovammo altrove.

XXX. Data una verga cilindrica omogenea primieramente distesa in linea retta e poi ridotta a catena, cioè curvata in circolo o poligono regolare, determinar col principio medesimo (232) la ragion dei pesi che possono stirarla verticalmente quando è verga, o dilatarla circolarmente quando è catena: e supposto che un filo cilindrico di ferro del diametro di $0^{pol.},1032$ non si spezzi che da un peso di $600^{lib.}$ attaccatogli verticalmente, assegnare il peso o sforzo di dilatazione che può esser sostenuto dalla catena se ella sia di ferro ed abbia $1^{pol.}$ di diametro e $200^{pie.}$ di lunghezza. *Ris.* 1°. Posti m, m' i pesi o masse che spezzerebbero la verga e la catena, a il raggio della catena, π la sua circonferenza, si troverà $m' = \frac{m\pi}{a}$: 2°. posti b, c i raggi delle sezioni della verga e del filo di ferro, ed m'' il peso che spezza il filo, si avrà $m' = \frac{b^2 m'' \pi}{ac^2} = 349840^{lib.}$ in circa.

XXXI. Si ha un sistema di 4 ruote dentate e di 4 rocchetti in cui mentre la prima ruota fa un giro, l' ultimo rocchetto ne fà 3600. Vorrebbe cangiarsi in questo sistema una ruota qualunque dei denti N con un rocchetto qualunque delle ali n, onde l' ultimo rocchetto faccia 4000 giri, mentre la prima ruota ne fa uno. Quanti denti x avrà la ruota, e quante ali y il rocchetto? *Ris.* $\frac{x}{y} = \frac{10N}{9n}$.

XXXII. Per muovere un orologio vi vuole un peso M, ma l' angustia del luogo non lasciando scendere il peso per più d' uno spazio S, l' orologio cammina solamente per un tempo T. Qual peso x vi vorrà per farlo camminar per un tempo nT e con quali macchine potrebbe adattarsi

all' orologio il nuovo peso? *Ris.* 1°. $x = nM$: 2°. le macchine son tutte quelle che rendono n^{pla} l' azion della forza.

XXXIII. Supposto che l' attrito sia $\frac{1}{4}$ della pressione, che la ruota d' un argano abbia un raggio di $2^{pie.}$, il cilindro di $4^{pol.}$, 8, il pernio di $1^{pol.}$, 2 e che la forza e la resistenza agiscano parallelamente e in un medesimo piano, determinar la forza f che può fare equilibrio ad una resistenza di $2000^{lib.}$ o debba salire o debba scendere. *Ris.* $f = 429^{lib.}$, 4 per la salita; $f = 371^{lib.}$, 24 per la discesa.

Fine della Meccanica.

ELEMENTI

DI IDROMECCANICA.

299. L' Idromeccanica si divide in due parti: l' una è l' *Idrostatica* o *Scienza dell' equilibrio dei Fluidi*, la quale poichè tratta delle varie proprietà dei fluidi, allorchè sono stagnanti e tranquilli in un recipiente, può anche chiamarsi *Teorìa dei Fluidi in quiete*: l' altra è l' *Idrodinamica* o *Scienza delle Forze dei Fluidi*, la quale poichè considera i fluidi stessi allorchè rotto l' equilibrio, son forzati a mettersi in movimento, può anche chiamarsi *Teorìa dei Fluidi in moto*.

300. Lontani dalle questioni importune della Fisica sistematica, non perderemo il nostro tempo ad investigar le ragioni della fluidità, che dall' epoca delle più antiche osservazioni finora quella delle più recenti scoperte, divennero sempre men facili a determinarsi. I solidi tutti che con una continuata ed insensibil traspirazione si risolvono in fluidi per comporsi nuovamente in solidi, e lo stesso durissimo diamante che nel fuoco d' uno specchio ustorio svapora appoco appoco e finalmente svanisce affatto dagli occhi; l' acqua che o si cangia in terra secondo il parere di Newton, o si trasforma in aria secondo gli esperimenti di qualche Chimico; quel numero prodigioso d' *arie* diverse, cioè (supposta la comune opinione) di fluidi di vario genere che Priestley con altri ha sviluppate dai fluidi e dai solidi analizzati; per tralasciar la volgare operazione che ora col fuoco ed ora coi sali converte in fluidi i sassi, l' arene, i metalli, o reciprocamente riduce in solidi l' acqua, il vino e perfino il mercurio: tutto ciò forma sulla fluidità un cumulo di fenomeni a cui non crediamo sì facile di adattare un' ipotesi.

301. Bastano però questi fenomeni, quando pur mancasse ogn' altra prova, a farci comprendere quanto fossero limitate le cognizioni di certi antichi Filosofi, che dal non sentirsi aggravati o dall' aria in cui vivevano, o dall' acqua in cui si immergevano talora, dedussero che i fluidi

nella regione lor propria sono spogliati di peso. Se le molecule della materia, unite in un solido, incontrastabilmente son gravi, perderanno dunque la gravità nel disunirsi e nell' occupare il luogo che più conviene alla natura del fluido in cui si son disciolte? Perciò riguarderemo in avvenire come indubitata la gravitazione dei fluidi, e su questo principio ne stabiliremo la teorìa.

PARTE PRIMA.

TEORÌA DE' FLUIDI IN QUIETE

Natura de' Fluidi in quiete.

302. Quel fluido le cui molecule da niuna intrinseca o estrinseca forza sensibile, son costrette a cangiar di luogo, si chiama un *Fluido in quiete:* la fermentazione intestina, l' azione non impedita della gravità, il vento, il fuoco (ma non già d' ordinario l' impercettibile evaporazione delle particelle fluide) turbano questa quiete e mettono il *Fluido in movimento*.

L' idea completa d' un fluido in quiete abbraccia più cose: la *natura del fluido* che riposa, la *condizione* che è necessaria al suo riposo, *lo stato delle molecule fluide* in questo caso, e le proprietà del *recipiente* che le contiene.

303. *Fluidi* o *Liquidi* si dicono quei corpi, le cui molecule slegate ed indipendenti tra loro hanno una *perfetta mobilità*, e cedono in conseguenza al più piccolo impulso. Se questa *perfetta mobilità* realmente non trovasi in alcun fluido, in quelli però di maggiore importanza è si grande, che nei casi ordinarj può supporsi perfetta per render così più semplice la teoria. Quando poi le piccole forze di tenacità, d' attrazione, d' affinità ec. che ogni fluido a diversi gradi possiede, modificano i fenomeni in guisa che i risultati dell' ipotesi più non convengono con quelli dell' esperienza, allora si corregge l' una con l' altra, come a luogo a luogo vedremo.

204. Vi sono dei fluidi sperimentalmente *incompressibili* ed *omogenei*, come l' acqua, il vino, il mercurio ec., che

che non potendo ridursi a maggiore o minor volume di quello che naturalmente hanno in ciascuno dei loro *strati*, conservano in tutti una densità uniforme, quantunque intanto dai fenomeni idraulici si rilevi, che le loro minime particelle son sottoposte a compressione: e ve ne sono degli *elastici* ed *eterogenei*, come l' aria, la fiamma, il vapor dell' acqua ec., che or crescono or diminuiscono di volume, ed hanno nei loro varj strati una variabile densità. I *fluidi imperfetti*, come la farina, la cenere, l' arena ec., non sono l' oggetto delle nostre ricerche.

305. Del resto, i fluidi non meno che i solidi, oltre il *peso assoluto*, o gravità generale che li fa tendere ad un centro comune (301), hanno una *gravità* relativa o *specifica* che ne distingue e caratterizza la specie, ed è il vario lor peso allorchè hanno un egual volume. Quindi se Γ, γ esprimano i pesi o gravità specifiche di due corpi e V il lor volume comune, saranno $\frac{\Gamma}{V}$, $\frac{\gamma}{V}$ le lor densità D, d (9. 10): e poichè $\Gamma : \gamma :: \frac{\Gamma}{V} : \frac{\gamma}{V}$, si dee concludere che *le gravità specifiche dei corpi son proporzionali o si stimano dalle lor densità*. Posti pertanto $P = Mg$, $p = mg$ i pesi di due corpi qualunque (9) purchè composti di parti omogenee e simili, sarà $\Gamma : \gamma :: D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$ (10) $:: \frac{Mg}{V} : \frac{mg}{v} :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e quindi $\Gamma = \frac{P}{V}$ ovvero $\gamma = \frac{p}{v}$ (11), cioè *la gravità specifica eguaglia il peso diviso per il volume*.

306. Dal peso o gravità generale (301) combinata con la perfetta mobilità (303) nasce la *condizione* necessaria all' equilibrio o riposo dei fluidi. Poichè ogni loro molecula sollecitata dal peso a discendere, cede alla sollecitazione in virtù della sua mobilità, e realmente discende finchè può: ora è evidente che in un vaso pieno di fluido le molecule posson discendere finchè l' esterior superficie del fluido forma un piano in qualunque modo inclinato; dunque perchè il fluido contenuto in un vaso, si ponga in equilibrio con se medesimo, è necessario che la sua esterior superficie divenga orizzontale e perciò anche normale in ogni suo punto alla direzione della gravità (273).

307. Questa orizzontal superficie del fluido chiamasi *livello* o *piano di livello*, e supposta la Terra prossimamente simile ad una sfera, non è già il livello un vero e geometrico piano, ma una porzione di sferica superficie, il cui centro è il centro medesimo della Terra; giacchè in questa sola disposizione delle molecule fluide, la direzione della gravità è in ogni punto normale (L. 410) alla esterior superficie del fluido, come bisogna (306).

33 308. Con ciò si determina quale di due dati luoghi A, B sia più vicino al centro C della Terra, e si conosce in conseguenza se l'acqua stagnante in A, possa col mezzo di tubi o di canali venire in B: poichè condotte per A, B e misurate con esattezza fino al livello DE le verticali AD, BE, si avrà la differenza $\pm$ AD $\mp$ BE che darà la cercata inclinazione o declività de' due luoghi. A ciò si riduce in somma l'essenziale operazione dell' *Arte di livellare* di cui si fa un uso sì grande nella Società o si tratti di derivazioni di fonti o di regolamenti di fiumi o di delineazioni di strade ec.: ma i varj metodi egualmente proprj alla livellazione, i diversi istrumenti più o meno comodi e più o meno accurati che possono adoperarvisi, gli sbagli considerabili che per la più piccola negligenza vi si posson commettere, e le cautele che conviene osservare per evitarli, non appartengono a questo luogo, e basterà sciogliere una difficoltà che naturalmente deriva da quanto or ora abbiam detto. Imperocchè per qual via potrà mai determinarsi, per esempio, la distanza MN se il raggio visuale del Livellatore, attesa la direzione sempre rettilinea della luce, non va per il *livello vero* AM, ma per l'*apparente* AF tangente in A, e segna con palese inganno il punto F in luogo del punto M? Sia dunque la lunghezza non molto grande AF $= a$, il diametro GM $= b$, la differenza FM $= x$, ed avremo AF$^2 = a^2 =$ GF $\times$ FM $= (b + x).x$ (L. 483): ma $b + x = b$ (L. 197. 6°) perchè il diametro GM rispetto ad FM può riguardarsi come infinito; dunque $a^2 = bx$ ed $x = \frac{a^2}{b}$, cioè si misurerà coi soliti metodi la linea AF o AM o DN (poichè essendo AF non molto grande, queste tre linee non differiscono sensibilmente tra loro) e diviso il quadrato di essa per il diametro GM o KN della Terra, questo quoziente esprimerà di quanto debba diminuirsi la distanza

 FIG.

trovata FN per aver la vera MN. Su questo principio può costruirsi una Tavola che, secondo le diverse lunghezze dell'apparente livello AF, mostri le correzioni da farsi alle corrispondenti distanze FN: per altro se la livellazione si faccia a piccoli tratti o *battute*, onde AF non sia mai più lunga di 20 o 30 tese per ciascuna *stazione*, la tangente AF si confonderà quasi con l'arco AM, la differenza FM potrà negligersi con sicurezza, e l'accennata regola con la Tavola che può formarsene, saranno inutili.

309. Quanto allo *stato delle molecule fluide* in caso d'equilibrio, ben si vede che, attesa la loro general gravità (301), le inferiori sostengono e son premute dalle superiori. Quindi se nel piccolo vaso HICD pieno d'acqua tranquilla, si consideri la molecula o goccia media FG dello strato ultimo IC, la pressione s che ella soffre sarà espressa dal peso p del filo fluido GE che le sovrasta verticalmente nella direzione della gravità (306), e si avrà $s=p$: ma $p=\gamma v$ (305), e il volume v è qui un prisma o cilindro che ha per base la base b della goccia FG, per altezza la verticale GE, e per solidità il prodotto $b\times$ GE (L. 561); dunque $s=p=b\times$ GE $\times\gamma$. Nè tal pressione può turbar l'equilibrio; poichè per imprimere un movimento alla goccia FG converrebbe o che cedesse il fondo del vaso, che si suppone abbastanza massiccio per resistere a questo sforzo, o che si movessero le goccie laterali, che sostenute di fianco dalle pareti del vaso e premute al di sopra come FG, ne elidono l'azione con una contraria ed egual reazione. Che se ora si aumenti il vaso a piacere, onde divenga MN, e si scelga un'altra goccia qualunque PQ, è manifesto che lo strato d'acqua contiguo alle pareti ed al fondo, farà figura di parete e di fondo riguardo allo strato seguente, questo la farà riguardo al suo vicino, e così sempre: dimodochè nel gran vaso MN la pressione della goccia PQ sarà come prima, $s=p=b\times$ QR $\times\gamma$. Or se la pressione di questa goccia fosse o maggiore o minore per la direzione di QR che per altro verso, la sua perfetta mobilità la spingerebbe ove la pressione è minore, e il sistema delle goccie più non sarebbe in riposo; dunque *qualsivoglia molecula d'un fluido in equilibrio è premuta egualmente per ogni verso, e la pressione equivale al peso d'un prisma dello stesso fluido che abbia per*

34

base la molecula stessa, e per altezza la sua distanza dal piano di livello.

310. Segue da ciò che l' essenziale del *recipiente* destinato a contenere un fluido in equilibrio, è la proporzione delle sue pareti e del suo fondo con lo sforzo o pressione continua delle molecule fluide; onde non solo la materia del vaso e la sua capacità sono affatto indifferenti all' equilibrio, ma anche la sua figura. Poichè considerate nel
35 vaso MNO, pieno d' un fluido stagnante, quelle sole molecule che formano lo stato arbitrario PQR, è certo che l' equilibrio risulta da una determinata resistenza che esse fanno alle loro contigue; dunque se queste molecule si concepiscan tolte dallo strato PQR e subito rimpiazzate da una materia qualunque dotata della medesima resistenza, tutto rimarrà necessariamente nello stato di prima; dunque la figura capricciosa del vaso MNORQP non altera l' equilibrio, e *comunque si faccia la comunicazione tra due o più recipienti di varia figura e diametro, il fluido contenuto in essi avrà sempre lo stesso livello*. Torneremo altrove a questo teorema e gli daremo allora l' universalità che gli conviene; ecco intanto, perchè i canali ed i pozzi di qualunque diametro, comunicanti tra loro o col fiume vicino, crescono e scemano concordemente d' una pari altezza: i soli tubi angustissimi o *capillari* per segrete ragioni o di viscosità o d' attrazione, fanno abbandonare ai fluidi questa legge, e mentre il mercurio non giunge in essi al piano di livello, l' acqua, l' olio, il vino ec. lo sormontano.

311. Tutto ciò è comune egualmente ai fluidi incompressibili ed agli elastici, mentre il peso e la perfetta mobilità d' onde risulta quanto si è fin quì stabilito, non hanno alcun vincolo necessario con l' elasticità, che perciò non può turbarne o modificarne gli effetti: ma l' equilibrio dei fluidi elastici ha delle proprietà particolari di cui mancano gli incompressibili. Infatti questa è, come altrove accennammo (205), la natura dei corpi perfettamente elastici, che la loro forza di restituzione, detta comunemente *elastica*, eguaglia esattamente quella di compressione: dal che subito s' inferisce che in un fluido tranquillo e compresso dal proprio suo peso, la forza elastica f d' una molecula qualunque FG è eguale alla pressione che el-
34 la soffre, e perciò $f = s = b \times GE \times \gamma$ (309). Quì però

bisogna risovvenirsi che γ non è più una quantità costante, come nei fluidi incompressibili, ma varia in ciascuno strato del fluido elastico (304): perciò se la distanza d'una molecula E dall' ultima molecula G, sia EG $= x$, la grossezza o altezza della molecula E sarà dx, e potendosi per tutto il tratto di questa infinitesima altezza suppor costante la gravità specifica γ, l' azione di questa molecula su la molecula G sarà $b \times \gamma dx$ (309), e integrando, l'azione di tutte le molecule contenute nella verticale EG, ovvero la total pressione contro la molecula G, sarà $s = f = b \int \gamma dx$: ove è chiaro che per effettuar l' integrazione conviene esprimere in x la variabile γ; dunque *la pressione d' una molecula* G *nei fluidi elastici non solo si stima dal solito prisma* h $\times$ GE (309), *ma ancora dalla particolare specifica gravità di ciascuna molecula contenuta nella verticale* GE. 34

312. Tale appunto è il caso dell' aria, fluido ampiamente diffuso intorno a noi, e della cui perfetta elasticità l' esperienza ormai bastantemente ha deciso. La stessa esperienza ci dice di più, che una massa d' aria da forze sempre maggiori compressa, si riduce in volumi v, v', v'' ec. reciprocamente proporzionali ai pesi o forze comprimenti c, c', c'' ec.; cosicchè si hanno l' analogie $v : v' :: c' : c$, $v : v'' :: c'' : c$, $v' : v'' :: c'' : c'$ ec.: ora $d : d' :: \frac{m}{v} : \frac{m'}{v'}$ (10) e quì abbiamo $m = m'$ perchè la massa d' aria che si comprime è unica; dunque $d : d' :: v' : v :: c : c'$, cioè *le densità d' una massa d' aria diversamente compressa, son proporzionali alle forze o pesi comprimenti, e perciò anche alle forze elastiche dell' aria nei diversi stati di compressione* (311).

313. Si osservi però che la stabilita proporzione tra le densità dell' aria e i pesi che la comprimono, probabilmente non ha luogo nei casi estremi; essendo inverisimile affatto che una quantità d' aria caricata d' un peso infinito, si riduca in un volume infinitesimo, o che premuta da una forza infinitesima, si spanda in un volume infinito. Il teorema pertanto si avvera nelle sole *densità medie*, giacchè queste sole possono sottoporsi all' esperienza, e di queste sole si ha bisogno negli ordinarj usi dell' aria. Si osservi ancora che questo fluido, atteso il caldo che lo dilata, il freddo che lo condensa, l' umidità che in certi casi

ne aumenta e in cert' altri ne diminuisce la molla, e le molte e varie esalazioni che ne alterano la purità, è soggetto a dei cangiamenti, i quali spesso ne turbano l'equilibrio e rendono poco esatti i risultati del calcolo.

Pressione dei fluidi in quiete contro i loro recipienti ed altri solidi.

35 314. Sia il recipiente MNO pieno d'un fluido tranquillo fino ad MO, e si voglia la pressione che soffre la minima particella o elemento V delle sue pareti. È manifesto che l'elemento è premuto dalla base della molecula contigua *m*, onde tutto si riduce a determinar la pressione di *m*. Supponghiamo che *m* sia premuta da una forza AV; e se AV sia obliqua alla molecula *m* o alla parete NM del recipiente, potrà risolversi nelle due forze AB, AC, l'una parallela e l'altra normale a CV. Quanto alla forza AC = BV, ella è vinta dalla resistenza del vaso in cui direttamente s'incontra, e non produce alcun movimento nella molecula *m*; non così la forza AB = CV che non trovando resistenza, spingerebbe la molecula *m* verso M: ma per ipotesi il fluido è tranquillo; dunque la forza che preme *m* non può mai essere obliqua alla parete NM; le sarà dunque normale, e normale sarà perciò la pressione contro la parete medesima.

315. Ciò che si dice della molecula *m* contigua al recipiente, dee intendersi di qualunque altra, facendo ciascuna, come sopra osservammo (309), la figura di parete riguardo a ciascun' altra: onde può stabilirsi che *ogni molecula d'un fluido in quiete è premuta da due forze eguali, opposte e normali*, senza di che il fluido sarebbe in moto. Se dunque usando il solito raziocinio (310), allo strato arbitrario PQR di molecule fluide si sostituisca una parete che faccia le loro veci, ogni elemento di questa parete sarà premuto dalle stesse due forze eguali, opposte e normali; dimodochè in generale *un recipiente soffre un' egual pressione o il fluido lo riempia o lo circondi*.

316. Ora poichè la misura della pressione contro la
34 molecula ST, si trovò $s = b \times TV \times \gamma$ (309), anche nel recipiente qualunque MZNO un suo elemento infinitesimo L, che eguaglia la base infinitamente piccola *b* della molecula (314), soffrirà una pressione $s = L \times LM \times \gamma$ equiva-

lente al peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per base l' elemento L e per altezza la sua distanza dal piano di livello . 34

Se il fluido fosse elastico, la pressione sarebbe $s = L \times \int \gamma dx$ (311), e già si è detto che non può aversi l' integrale senza esprimer γ per x. Ora ciò facilmente si otterrebbe se potesse determinarsi la legge con cui dalla cima al fondo del recipiente vanno crescendo le densità o gravità specifiche negli strati del fluido: ma tali determinazioni per i fluidi elastici in generale, fondandosi per lo più sopra ipotesi molto incerte, è questo uno dei tanti casi nei quali convien ricorrere ad un' esperienza immediata: perciò non intendiamo quì di parlarne.

317. Dunque 1°. *Le pressioni* S, s *che i fluidi* MONZ, HDCI *esercitano contro tutti i punti delle circonferenze orizzontali* i cui diametri sono $ZN = 2b$, $IC = 2b'$, eguagliano la somma di tutti i prismi infinitesimi che hanno $ZM = a$ ed $IH = a'$ per altezze e ciascun elemento di queste circonferenze per basi, cioè *sono eguali al peso d' un prisma del medesimo fluido, che abbia per basi le circonferenze* $2b\pi$, $2b'\pi$ (L. 520) *ed* a, a' *per altezze*; onde $S : s :: 2ab\gamma\pi : 2a'b'\gamma'\pi :: ab\gamma : a'b'\gamma'$. Perchè dunque i vasi cilindrici MONZ, HDCI sostengano lo sforzo dei fluidi, è necessario che le resistenze R, r di quelli eguaglino le pressioni S, s di questi, e sia $R = ab\gamma$, $r = a'b'\gamma'$, ovvero $R : r :: ab\gamma : a'b'\gamma'$. Ora le resistenze R, r evidentemente risultano dalle grossezze g, g' dei vasi e dalle coesioni o tenacità t, t' delle materie onde son fatti; dunque avremo $gt : g't' :: ab\gamma : a'b'\gamma'$, e quindi *sarà* $g' = \frac{a'b'\gamma' gt}{ab\gamma t'}$ *la grossezza uniforme che dee darsi ad un tubo di nota tenacità* t' *affinchè con una data ampiezza o raggio* b' *regga ad un' altezza data* a' *un fluido di nota gravità specifica* γ', *quando si sappia per esperienza la grossezza* g *e la tenacità* t *d' un altro tubo, che ha sostenuto fino ad una determinata altezza* a *lo sforzo d' un fluido della data gravità specifica* γ. Così se si voglia la grossezza d' un tubo di piombo che con un raggio di *poll.* 3 regga l' acqua fino a *pie.* 100 d' altezza, mentre è noto che un altro tubo di piombo con una grossezza di *lin.* 6 e con un raggio di *poll.* 6 la resse all' altezza di *pie.* 60; sarà $\gamma = \gamma'$, $t = t'$

(perchè ambedue i tubi son di piombo e debbon reggere uno stesso fluido) $a = 60$, $a' = 100$, $b = 6$, $b' = 3$, $g = 6^{lin.}$, e quindi $g' = \frac{100 \cdot 3 \cdot 6}{60 \cdot 6} = 5^{lin.}$. Del pari se un tubo di ferro del raggio di *poll.* 2 debba reggere del mercurio all' altezza di *pie.* 30, poichè l' esperienza ha insegnato che il ferro è 42 volte più tenace del piombo, avremo $\gamma = 1$, $\gamma' = 14$, $t = 1$, $t' = 42$, $a = 60$, $a' = 30$, $b = 6$, $b' = 2$, $g = 6^{lin.}$, e quindi $g' = \frac{30 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 6}{60 \cdot 6 \cdot 42} = \frac{1}{3}^{lin.}$. Si avverta frattanto

I°. Che non è necessaria la riduzione di tutti i termini ad una specie medesima di misure, come tutti a *piedi*, tutti a *pollici* ec.: basta che sieno ridotti alla stessa specie i termini corrispondenti a ed a', b e b', g e g' (L. 63): così nell' Esempio di sopra, $a = 60$ ed $a' = 100$ eran *piedi*, $b = 6$ e $b' = 3$ eran *pollici*, e $g = 6$ essendo *linee*, dettero $g' = 5$ parimente *linee*. II°. Che veramente ai raggi b, b' dovrebbero aggiungersi le grossezze g, g' che ne son parte; le abbiamo trascurate di sopra supponendole insensibili o infinitesime in confronto dei raggi stessi: se l' ipotesi non sussista, cioè se la ragione di b a g o di b' a g' sia valutabile, converrà riguardar come concentrata nel mezzo delle grossezze g, g' la forza tutta di tenacità, e prendere un medio aritmetico tra i raggi delle due circonferenze interiore ed esteriore del tubo, sicchè invece di b o di b' si sostituisca $b + \frac{g}{2}$ o $b' + \frac{g'}{2}$ quando sia data g' e si cerchi a'; in tali casi b e g, come pure b' e g' dovranno ridursi alla medesima specie (I°.). Così se vogliasi l' altezza a cui l' acqua può giungere in un tubo di bronzo che con un raggio di $\frac{1}{2}$ *piede* è grosso *poll.* 4, sarà $b' = 6$, $g' = 4$ e $b' + \frac{g'}{2} = 8$: ma dal tubo di piombo si ha, come sopra, $b = 6$, $g = \frac{1}{2}$, $a = 60$, ed il bronzo è 30 volte più tenace del piombo, onde $t' = 30$,

$t = 1$;

$t = 1$; dunque $a' = \frac{abg't'}{\left(b' + \frac{g'}{2}\right)g} = \frac{60 . 6 . 4 . 30}{8 . \frac{1}{2}} = 60 . 6 . 30$
$= 10800$

318. Dunque 2°. *La pressione del fluido sul fondo orizzontale* ZN risulta dalla somma di tutti i prismi che hanno per base ciascun elemento del fondo, e per altezza la stessa altezza del fluido, cioè *si misura dal peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per base il fondo stesso del vaso, e per altezza la distanza del fondo dal piano di livello;* ond' è che il poco fluido contenuto nell'angustissimo vaso ZXHDKN esercita contro il fondo ZN la pressione medesima che vi esercita il molto fluido del gran vaso MN, verità maravigliosa a cui perciò si è dato il nome di *paradosso idrostatico:* ma si spiegherà facilmente se si osservi, che fatta in X un' apertura al minor vaso, la pressione del fluido lo spingerebbe all' insù fino quasi al livello MO, come altrove dimostreremo; dunque il fluido trattenuto dall' azione o resistenza delle pareti XK, dee premere con eguale sforzo il fondo ZN, il quale perciò sostiene non solo il peso, ma anche la reazione del fluido. 34

319. Dunque 3°. Se sopra un fondo poligono si costruiscano tre vasi, il primo in figura di piramide ma più stretta in alto che in basso, il secondo in figura di prisma, il terzo in figura pur di piramide ma più stretta in basso che in alto, la pressione del fluido contro il fondo supererà nel primo, eguaglierà nel secondo, e sarà minore nel terzo del peso totale del fluido contenuto in ciascun vaso. Dal che si vede quanto differisca da quella dei solidi l' azione dei fluidi; mentre supposto che nel primo e terzo vaso il fluido improvvisamente si assodasse, la pressione contro il fondo eguaglierebbe sempre la totalità del peso. Se si trattasse però di sollevare o di trasportare un vaso pieno di fluido, sarebbe ridicolo il mettere in conto la pressione contro le pareti ed il fondo; poichè è evidente che per sollevare il vaso basta vincer lo sforzo della gravità la cui azione non dipende dalle pressioni ma dalle masse (9).

320. Dunque 4°. *La pressione del fluido contro una parete qualunque del recipiente* risulta dalla somma di tutti i prismi che hanno per base ciascun elemento della parete, e per altezza la particolar distanza d' ognuno dalla

superficie del fluido, cioè *si misura dal peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per base la parete data, e per altezza la distanza del centro di gravità di essa dal piano di livello* (126. II.). Trovato dunque il centro di gravità della superficie d' un vaso qualunque (115. 118), si avrà subito la misura della varia pressione o interna del fluido che vi si contiene, o esterna del fluido che lo circonda (315). Così, per esempio, giacchè le superficie prismatiche hanno il centro di gravità nel mezzo della loro altezza (116), si troverà che la pressione contro i lati d' un vaso cubico orizzontalmente situato è doppia del peso dell' acqua, ec.

321. Ma la pressione del fluido contro le pareti curve d' un vaso o solido di rivoluzione può aversi in altro modo. Si concepisca che la linea qualunque OEN giri in-
36 torno all' asse normale BM, e condotta l' ordinata normale DE $= y$, sia OM $= a$, NB $= b$, BM $= c$, MD $= x$, e l' elemento della superficie curva descritta dalla rotazione (L. 956) $2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: ma tutti i punti o porzioni infinitesime di questo elemento sono ad egual distanza dalla superficie del fluido; dunque (320) la pressione contro di esso sarà $ds = 2\gamma\pi x y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, il cui integrale darà la pressione contro la porzione indefinita OED del vaso, e quindi fatto $x = c$, si avrà la pressione totale contro l' intero vaso.

Applicazioni. I. Sia ON il lato obliquo d' un trapezio che aggirandosi produca la superficie d' un cono retto troncato. Condotte NK, EG parallele a BM, sarà 1°. ON $= \sqrt{(KN^2 + OK^2)} = \sqrt{[c^2 + (a-b)^2]} = m$; 2°. ON (m) : OE :: KN (c) : GE (x) :: OK $(a-b)$: OG $(a-y)$, onde OE $= \frac{mx}{c}$, d(OE) $= Ee = \frac{mdx}{c} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (L. 861), ed $y = a - \frac{(a-b)x}{c}$; dunque $ds = \frac{m\gamma\pi}{c}\left(2axdx - \frac{2(a-b)x^2dx}{c}\right)$, ed integrando con osservare che quando $x = 0$, svanisce ogni pressione, si avrà $s = \frac{m\gamma\pi}{c}\left(ax^2 - \frac{2(a-b)x^3}{3c}\right)$, ove fatto $x = c$, la total pressione contro la superficie del vaso conico sarà $s = m\gamma\pi$

$\left(ac - \frac{2c(a-b)}{3} \right) = 2c\gamma m\pi \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{3} \right)$.

II. Sia ON un semiarco circolare del raggio r che aggirandosi, produca la superficie d' un segmento sferico: sarà dunque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{rdx}{y}$ (L. 862) e $ds = 2\gamma r\pi x dx$, onde integrando, $s = \gamma r\pi x^2 = 2\gamma r\pi x \frac{x}{2}$: ma $2r\pi x$ eguaglia la superficie del segmento sferico (L. 640); dunque la pressione totale contro di esso è eguale ad un prisma di fluido che ha per base la superficie del segmento e per altezza la metà della sua altezza. 36

322. Si immerga ora tra due strati orizzontali VX, ZC d' un fluido VXZC e con qualunque inclinazione MBT, il piano OMBN terminato dalla base orizzontale MO e da una linea retta o curva OEN. Condotte l' ordinate infinitamente vicine DE, *de* parallele a VX, comune sezione della superficie prolungata MONB e del piano di livello, ed alzata da D la normale DS sul piano stesso XAS, la pressione contro l' elemento De sarà espressa (318) dal prodotto e della gravità specifica γ del fluido, e della verticale DS, e del medesimo elemento De che per la sua piccolezza può riguardarsi come orizzontale: onde posto l' angolo d' inclinazione MBT = DAS = i, la lunghezza BM = l, la base BN = b, la distanza MA = c, l' ascissa MD = x, l' ordinata DE = y, sarà l' elemento Dd = dx, l' elemento De = ydx (L. 946), l' ipotenusa DA = $c + x$, la verticale DS = DA $\times$ *sen* DAS = $(c + x)$ *sen* i (L. 644), e il prisma esprimente la pressione elementare $ds = \gamma (c + x) ydx \text{ sen } i = \gamma (cydx + yxdx) \text{ sen } i$, il cui integrale preso come sopra (321), darà l' intera pressione contro il piano OMBN.

Applicazioni. I. Sia OMBN un rettangolo; sarà dunque $y = b$, onde $ds = \gamma (bcdx + bxdx) \text{ sen } i$, ed integrando, $s = \gamma \left(bcx + \frac{bx^2}{2} \right) \text{ sen } i + C$: ma quando $x = 0$, manca ogni pressione e però $C = 0$; dunque fatto $x = l$, la pressione contro l' intero rettangolo sarà $s = \gamma \left(bcl + \frac{bl^2}{2} \right) \text{ sen } i$, la quale se il fluido rada il lato MO onde $c = 0$, diviene $s = \frac{b\gamma l^2 \text{ sen } i}{2}$.

FIG. 36 II. Sia OMBN un semicircolo, il cui diametro MB $= l$; sarà dunque $b = 0$, $y^2 = lx - x^2$ (L. 478), $2ydy = ldx - 2xdx$, $xdx = \frac{ldx}{2} - ydy$, e $ds = \gamma\,(cydx + \frac{lydx}{2} - y^2dy)$ *sen i*, ed integrando, $s = \gamma$ *sen i* $(\frac{-y^3}{3} + (c + \frac{l}{2})\int ydx)$: ma $\int ydx$ esprime il semisegmento MDE (L. 946) che preso $x = l$, e perciò $y = 0$, diviene il dato semicircolo $\frac{l^2\pi}{8}$ (L. 520); dunque la total pressione contro di esso sarà $s = \gamma\,(c + \frac{l}{2})\frac{l^2\pi \text{ sen } i}{8}$.

323. Determiniamo infine il *centro di pressione* o quel punto della superficie premuta in cui si concepisce riunito tutto lo sforzo della pressione. Se questa pressione considerata come una forza sia s, il suo momento m, e la distanza del centro cercato dall' asse dei momenti sia z, si avrà $sz = m$ (105) e tutto si ridurrà a determinare s ed m. Pertanto sotto un angolo qualunque FPQ sia inclinata all'orizzonte la superficie piana OIHN situata come prima (322), e divisa in oltre dalla linea BM dell' ascisse in due simili ed eguali porzioni, con l' ordinate infinitamente vicine EL, *el* parallele alla solita XV (322). Condotte da D le normali DF ad XV, e DR al piano di livello XFR, sia MD $= x$, DL $= y$, MA $= c$, l'angolo ADL $=$ DAF $= \varphi$, l' angolo FPQ $=$ PFR $= \theta$: dunque nel triangolo DFA rettangolo in F, si avrà DF $= (c + x)$ *sen* φ (L. 644), e nel triangolo DFR rettangolo in R sarà DR $= (c + x)$ *sen* φ *sen* θ; sarà anche l' area infinitesima Le $= 2ydx \times$ *sen* φ (L. 946), la pressione infinitesima contro di essa $ds = \gamma$. DR . Le $= 2\gamma ydx\,(c + x)$ *sen*$^2 \varphi$ *sen* θ (318), e il momento infinitesimo di questa pressione riferito all' asse XV dei momenti (105), sarà $dm = ds \times$ DF $= 2\gamma ydx\,(c + x)^2$ *sen*$^3 \varphi$ *sen* θ: onde il piano indefinito OELI soffrirà la pressione totale $s = \gamma$ *sen*$^2 \varphi$ *sen* $\theta \int 2ydx\,(c + x)$, il cui total momento sarà $m = \gamma$ *sen*$^3 \varphi$ *sen* $\theta \int 2ydx\,(c + x)^2$. Sostituiti pertanto questi valori nell' equazione $sz = m$, si avrà z *sen*$^2 \varphi$ *sen* $\theta \int 2ydx\,(c + x) =$ *sen*$^3 \varphi$ *sen* $\theta \int 2ydx\,(c + x)^2$; e però $z =$

 FIG.

$\frac{sen\,\phi \int y dx (c+x)^2}{\int y dx (c+x)}$, distanza dell' asse XV dei momenti dal 36
cercato centro di pressione, che per le condizioni supposte, dee necessariamente trovarsi nella linea MB dell' ascisse: e si osservi che se fosse retto l' angolo delle coordinate, onde $\phi = 90°$, $sen\,\phi = 1$, ed inoltre OI coincidesse con XV, onde $AM = c = 0$, si avrebbe più semplicemente $z = \frac{\int y x^2 dx}{\int y x dx}$.

Applicazioni. I. Vogliasi il centro di pressione in un parallelogrammo che coincide col livello XV ed ha la semibase $BN = b$ e la lunghezza $BM = a$. Sarà dunque $y = b$, e verrà $z = \frac{sen\,\phi \int x^2 dx}{\int x dx} = \frac{2x^3\, sen\,\phi}{3x^2} = \frac{2x\, sen\,\phi}{3}$: fatto $x = a$, avremo $z = \frac{2a\, sen\,\phi}{3}$, cioè il centro cercato è ai due terzi di MB contando da M.

II. Vogliasi il centro di pressione in un triangolo che ha il vertice verso XV. Sarà dunque $DL = y = \frac{bx}{a}$, e però $z = \frac{sen\,\phi \int x dx (c+x)^2}{\int x dx (c+x)} = \frac{(6c^2 + 8cx + 3x^2)\, sen\,\phi}{2(3c+2x)}$. Fatto $x = a$, viene $z = \frac{(6c^2 + 8ac + 3a^2)\, sen\,\phi}{2(3c+2a)}$.

III. Cerchisi il centro di pressione contro il fondo circolare d' una botte, situato verticalmente. Chiamo r il raggio del fondo, e c l' altezza del fluido al di sopra del raggio: sarà $sen\,\phi = 1$, $y^2 = 2rx - x^2$, $xdx = rdx - ydy$, $\int y dx = \text{ID}$, $\int xy dx = r.\text{ID} - \frac{y^3}{3}$, $\int x^2 y dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx \times (2r - x)^{\frac{1}{2}} =$ (L. 903) $- \frac{xy^3}{4} + \frac{5r}{4} \int xy dx$, e $z = \frac{c^2.\text{ID} + 2cr.\text{ID} - \frac{2cy^3}{3} - \frac{xy^3}{4} + \frac{5r}{4}\left(r.\text{ID} - \frac{y^3}{3}\right)}{c.\text{ID} + r.\text{ID} - \frac{y^3}{3}}$. Cangiato dunque ID nel semicircolo IB per aver la total pressione, e

FIG.
36

perciò fatto $y = 0$, verrà $z = \frac{(c^2 + 2cr + \frac{5r^2}{4})\,IB}{(c + r)\,IB} = c +$ $r + \frac{r^2}{4(c + r)}$, onde $\frac{r^2}{4(c+r)}$ indicherà quanto il centro di pressione è più basso del centro del fondo.

Proprietà dei corpi immersi nei fluidi in quiete.

35 324. Nel fluido MNO in quiete si concepisca un volume FE di esso che eguagli il volume d'un dato corpo qualunque DH, e giacchè FE si sostien tranquillo in mezzo al fluido, ben si vede che il suo peso è eguale alla pressione delle molecule che lo circondano, senza di che si produrrebbe tra esse un movimento, contro l'ipotesi. Se dunque il corpo o fluido o solido DH eguagli in peso FE come lo eguaglia in volume, e si ponga DH in luogo di FE, è manifesto che la primitiva pressione e l'equilibrio dovranno sussistere interamente. Ora supposto in G il centro di gravità del volume FE, l'azione del peso spinge FE a scendere per la verticale o linea di direzione GQ (273); dunque poichè FE non discende, bisogna concludere che la pressione del fluido *ambiente* MNO non solo è eguale, ma anche opposta alla forza di gravità ed agisce contro FE per la linea stessa QG (273): ma questa pressione resta visibilmente la medesima, finchè il volume di FE o di DH si conserva lo stesso, benchè DH scemi o cresca di peso; dunque *la spinta verticale* GQ *o* QG *d'un fluido contro un corpo qualunque* DH *che vi si immerga, eguaglia il peso del fluido scacciato* FE, *e passa sempre per il centro* G *di gravità del volume* FE.

325. Sieno pertanto Γ, γ, P, p, V, v le gravità specifiche, i pesi ed i volumi del fluido FE e del corpo DH: si avrà $\Gamma : \gamma :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$ (305), onde poichè si è supposto (324) $V = v$, sarà $p = \frac{\gamma P}{\Gamma}$. Ora in caso d'equilibrio il peso di FE vien distrutto dalla eguale e contraria pressione s del fluido ambiente (324), onde $P = s$; dunque se in luogo di FE si ponga nel fluido il corpo DH, il nuovo suo peso diventerà $p - s = p - P = q$, cioè *un corpo qualunque immerso in un fluido, vi perde una porzion del*

suo peso, la quale eguaglia il peso del fluido scacciato. E da ciò si comprende per qual ragione un sasso, una secchia ec. si facciano salir con poca pena dal fondo dell'acqua alla superficie, e vi voglia poi uno sforzo più grande per continuare ad alzarli: nell' acqua il loro peso è $q = p - P$, fuor dell' acqua è p non facendo caso per ora dell' aria ambiente.

326. Le due equazioni $p = \frac{\gamma P}{\Gamma}$ e $q = p - P$ danno $q = \frac{\gamma P}{\Gamma} - P = \frac{P}{\Gamma}(\gamma - \Gamma)$: onde 1°. se sia $\gamma > \Gamma$, sarà $\frac{P}{\Gamma}(\gamma - \Gamma)$, e perciò anche q ovvero $p - s$ (325) una quantità positiva, onde $p > s$, cioè *se la gravità specifica del corpo* DH *superi quella del fluido* MN, *il peso* P *di* DH *vincerà la pressione contraria, e* DH *col residuo* q *del suo peso calerà al fondo;* un pollice cubico d' ottone, per esempio, scenderà nell' acqua piovana con un peso $q = 4\frac{1}{2}$ *onc. franc.* incirca, giacchè $P = \frac{70^{lib.}}{1728}$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 8$: 2°. se sia $\gamma = \Gamma$, sarà $q = 0$, e perciò $0 = p - P = p - s$ (325), ed $s = p$, cioè *se le gravità specifiche del corpo* DH *e del fluido* MN *sieno eguali, il peso* p *di* DH *sarà distrutto dalla contraria pressione del fluido, e* DH *resterà sospeso indifferentemente in qualunque parte di* MNO; il legno del Brasile, per esempio, si fermerà pendente nell' acqua marina ovunque si collochi, giacchè l' uno e l' altra hanno la stessa specifica gravità: 3°. se sia $\gamma < \Gamma$, sarà $\frac{P}{\Gamma}(\gamma - \Gamma)$, e perciò anche q ovvero $p - s$ una quantità negativa, onde $p < s$, cioè *se la gravità specifica di* DH *sia minor di quella del fluido* MN, *il peso* p *di* DH *sarà vinto dalla pressione contraria, ed il residuo* q *di essa lo spingerà alla superficie del fluido;* un pollice cubico di sughero, per esempio, salirà nell' acqua piovana in virtù d' un peso negativo o d' una positiva pressione $q = \frac{1}{2}$ *onc. franc.* giacchè $P = \frac{70}{1728}$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0,24$. 35

327. Quest' ultimo è il caso dei *galleggianti*, cioè di quei corpi DH che immersi in un fluido MNO specifica-

35 mente più grave; salgono alla superficie, e dopo qualche oscillazione vi rimangon tranquilli. Se il galleggiante DH è un fluido, niuna sua parte resterà immersa nel fluido MNO, poichè non potendo DH per la minor gravità restare immerso interamente, a misura che si alzerà sul livello MO, sarà costretto (306) a mettersi in livello con se medesimo, e spargendosi orizzontalmente sopra MO, abbandonerà quella porzione di se che tuttora è sommersa; questa dunque sarà spinta fuori, e si livellerà come la prima, finchè la superficie MO del fluido più grave diverrà la base del più leggiero: tanto appunto succede allorchè s' immerge dell' olio nell' acqua comune. Ma se il galleggiante DH è un solido, una parte di esso emergerà dal fluido MNO, e una parte vi resterà sommersa; poichè non potendo il solido mettersi a livello con se medesimo, se tutto emergesse non graviterebbe punto sul fluido, cioè non avrebbe alcun peso, il che è assurdo. Supposto pertanto che il volume fluido IK eguagli in peso il solido DH, è visibile che DH potrà far le veci di IK in modo che tolto IK e sostituito DH, non si turberà l' equilibrio: ma in tal caso la parte immersa di DH sarà IK, e la rimanente IL sarà fuori del fluido; dunque *un galleggiante caccia di luogo un volume di fluido che eguaglia in peso il suo medesimo peso.*

328. Sieno, come prima Γ, γ le specifiche gravità del fluido e del galleggiante, V il volume del fluido scacciato, P il suo peso, p il peso del galleggiante LS, v il suo volume, e w il volume della parte immersa IK; onde occupando IK il luogo del fluido scacciato, sarà $V = w$. Avremo dunque al solito $\Gamma : \gamma :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e perchè $P = p$ (327) e $V = w$, sarà $\Gamma : \gamma :: v : w$, e quindi $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$, volume della parte immersa IK del galleggiante. Così se nel mercurio si immerga un cilindro di rame Giapponese la cui base sia b l' altezza *poll.* 7, e perciò la solidità $7b$ (L. 561), sarà $\Gamma = 14$, $\gamma = 9$, $v = 7b$, e chiamata x l'altezza IS della parte immersa, avremo $w = bx = \frac{63b}{14}$, onde $x = \frac{9}{2} =$ *poll.* 4, 5: dunque l' altezza IX della parte emergente sarà $7 - x =$ *poll.* 2, 5.

329. Per

 FIG.

329. Per altro l' equazione $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$ è vera solamente 35
nel vuoto; poichè se tanto il fluido IK, quanto il solido DH sieno nell' aria, i loro volumi V, v scaccieranno due volumi V, v d' aria d' un peso p', p'', e i loro pesi P, p si ridurranno ai pesi $P - p'$, $p - p''$ (325). Supposta dunque γ' la gravità specifica dell' aria, sarà $P = \Gamma V$, $p' = \gamma' V$; $p = \gamma v$, $p'' = \gamma' v$, e $P - p' = V(\Gamma - \gamma')$, $p - p'' = v(\gamma - \gamma')$, cioè le specifiche gravità che riguardo ai pesi P, p, erano Γ e γ nel vuoto, divengono $\Gamma - \gamma'$ e $\gamma - \gamma'$ riguardo ai pesi $P - p'$ e $p - p''$ nell' aria; dunque ponendo queste in luogo di quelle nell' equazione $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$, verrà $w = \frac{v(\gamma - \gamma')}{\Gamma - \gamma'}$, volume che ha nell' aria la parte immersa del galleggiante. Si osservi però che quand' anche il fluido MNO fosse l' acqua piovana, che pure è assai leggiera, si avrebbe $\Gamma = 1$ e $\gamma' = 0,001$, cioè il peso dell' aria è sì piccolo in paragon del peso dell' acqua, che l' influenza di quella sull' immersione dei solidi potrà negligersi francamente, se pur non si voglia un' estrema esattezza. Infatti immerso, come sopra (328), il cilindro di rame nel mercurio, e versata in esso dell' acqua finchè ricuopra il cilindro, è certo che il mercurio è premuto dall' acqua e dall' aria, e l' esperienza ci dà allora un' immersione di *poll.* 4,3 del cilindro: vediamo pertanto ciò che dà la teorìa, trascurando la considerazione dell' aria. Poichè il mercurio è caricato dall' acqua, prendo l' equazione $w = \frac{v(\gamma - \gamma')}{\Gamma - \gamma'}$, ove la gravità specifica dell' acqua è $\gamma' = 1$ e gli altri valori son come prima (328); dunque $w = bx = \frac{56b}{13}$ ed $x = \frac{56}{13} = 4\frac{4}{13} = 4,308$ incirca, cioè la teorìa differisce dall' esperienza meno di $\frac{8}{1000}$, il che nei casi ordinarj è realmente nulla.

330. Sembrerà forse più valutabile il peso che l' aria aggiunge all' oro, all' argento e a tutti gli altri corpi che si pesano in mezzo a lei, quando il contrappeso e il corpo che vuol pesarsi non hanno una stessa gravità specifica. Per mezzo d' una bilancia si equilibri in aria con un

peso di piombo un pezzo di sughero, e V, v, Γ, γ ne sieno i volumi e le specifiche gravità, supposti P, p i loro veri pesi; dunque chiamando γ' la gravità specifica dell' aria e ragionando come sopra (329), il piombo avrà nell' aria un peso $P - p'$ ed il sughero un peso $p - p''$; e poichè l' equilibrio dà $P - p' = p - p''$, sarà anche $V(\Gamma - \gamma') = v(\gamma - \gamma')$; onde se $\Gamma = \gamma$, verrà $(V - v)(\Gamma - \gamma') = 0$: ma non può esser $\Gamma - \gamma' = 0$; dunque (L. 178) $V = v$ e $P (= \Gamma V) = p (= \gamma v)$, cioè *quando due solidi equilibrati in aria hanno una stessa gravità specifica, i loro veri pesi sono eguali*. Ma se $\Gamma > \gamma$, come nel nostro caso del piombo e del sughero, sarà $\Gamma - \gamma' > \gamma - \gamma'$ e quindi $v > V$, $p'' (= \gamma' v) > p' (= \gamma' V)$ e $p > P$, come si raccoglie dall' equazioni di sopra $V(\Gamma - \gamma') = v(\gamma - \gamma')$ e $P - p' = p - p''$; dunque *quando due solidi hanno ineguali le gravità specifiche, i veri lor pesi sono ineguali, benchè nell' aria si mostrino in equilibrio:* infatti portata la bilancia nel vuoto, il sughero improvvisamente prepondera. Volendo allora il peso x da aggiungersi a P per restituir l' equilibrio, sarà $P + x = p$: ma abbiamo $P = \Gamma V = \frac{\Gamma(P - p')}{\Gamma - \gamma'}$ (329), $p = \gamma v = \frac{\gamma(P - p')}{\gamma - \gamma'}$; dunque $x = p - P = \frac{\gamma(P - p')}{\gamma - \gamma'} - \frac{\Gamma(P - p')}{\Gamma - \gamma'} = \frac{\gamma'(P - p')(\Gamma - \gamma)}{(\gamma - \gamma')(\Gamma - \gamma')} = \frac{\gamma'(P - p')(\Gamma - \gamma)}{\Gamma\gamma}$, essendo γ' assai piccolo in confronto di Γ e γ. Così se il sughero posto in equilibrio col piombo, abbia un peso di 1000 grani, sarà $P - p' = 1000$, $\Gamma = 11,325$, $\gamma = 0,24$, $\gamma' = 0,001$ ed $x = \frac{0,001 \,.\, 1000 \,.\, 11,085}{11,325 \,.\, 0,24} = 4$ grani incirca. Del resto, come di due corpi equilibrati nell' aria il più leggiero prepondera nel vuoto, così prepondera il più grave in un fluido specificamente più pesante dell' aria; la ragione è la stessa, e il peso da aggiungersi per ristabilir l' equilibrio è sempre $x = \frac{\gamma'(P - p')(\Gamma - \gamma)}{\Gamma\gamma}$. Se per esempio, si equilibri in aria con dell' ottone una ghinea, il cui peso sia 129 grani, e si immerga quindi la bilancia nell' acqua

piovana, la ghinea preponderera, e avremo $P - p' = 129$, $\Gamma = 18,888$, $\gamma = 8$, $\gamma' = 1$ ed $x = \frac{129 . 10,888}{18,888 . 8} = 9\,gr.$ in circa, peso da aggiungersi all' ottone per riaver l' equilibrio.

331. Nascono da queste dottrine diversi metodi per determinar le specifiche gravità dei solidi e dei fluidi. Quanto ai solidi, o essi si affondano nell'acqua piovana o vi galleggiano: se vanno a fondo, presa per termine di comparazione e fissata ad arbitrio la gravità specifica $\gamma = 1$ dell' acqua piovana, si esplori accuratamente nell' aria, la cui influenza per lo più non si valuta (329), il peso P del dato solido, e ne sia V il volume, Γ la specifica gravità cercata, e perciò $P = \Gamma V$. Quindi sospesolo con un filo al braccio d' una bilancia, si immerga nell'acqua e per mezzo d' un contrappeso p si faccia l' equilibrio. È chiaro che il solido scaccia un volume d' acqua eguale al suo volume, e si sa che se il peso del volume scacciato si chiami $p' = \gamma V$, resta al solido immerso il solo peso $q = P - p'$ (325) $= V(\Gamma - \gamma)$: ma atteso l' equilibrio, si ha $P - p' = p$; dunque $p = V(\Gamma - \gamma)$, $\gamma = \frac{\Gamma V - p}{V}$, $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma V - p}{\Gamma V} = \frac{P - p}{P}$, e poichè $\gamma = 1$ per ipotesi, si ha finalmente $\Gamma = \frac{P}{P - p}$. Così se un pezzo d'oro pesi nell' aria 3 *onc.* e sia sostenuto nell' acqua da *onc.* 2,8473, sarà $P = 3$, $p = 2,8473$ e $\Gamma = 19,64$ incirca.

332. Ma se il solido è un galleggiante d' un peso p' e d' una ignota gravità specifica γ', conviene unirlo ad un altro solido che si affondi e di cui si conosca il peso p, e si abbia dal precedente metodo la gravità specifica γ. Quindi notato il peso P del solido composto, se ne trovi col metodo stesso la specifica gravità Γ, e poichè i volumi v, w dei solidi più grave e più leggiero, formano il volume V del solido composto, sarà $v + w = V$ ovvero $\frac{p}{\gamma} + \frac{p'}{\gamma'} = \frac{P}{\Gamma}$, onde $\gamma' = \frac{\Gamma\gamma p'}{P\gamma - p\Gamma}$.

333. Quanto alla gravità specifica γ' d'un fluido qualunque, siccome immerso il solido nell' acqua piovana e

fatto l' equilibrio col peso p, si trovò $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{P-p}{P}$ (331), così immerso il solido stesso nel dato fluido e fatto l'equilibrio con un peso p', si avrà $\frac{\gamma'}{\Gamma}=\frac{P-p'}{P}$; dividendo pertanto questa equazione per quella, verrà $\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{P-p'}{P-p}$, cioè poichè $\gamma=1$ (331), la specifica gravità del dato fluido sarà $\gamma'=\frac{P-p'}{P-p}$. Anche l'equazione $x=\frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{\Gamma\gamma}$ (330), che suppone note le specifiche gravità dei solidi (331), potrebbe servire all' intento; poichè trovato con un'esatta esperienza il peso, che per riaver l'equilibrio deve aggiungersi al più leggiero dei due solidi immersi nel dato fluido, si conoscerà $x=a$, e l' equazione diventerà $\gamma'=\frac{a\Gamma\gamma}{(P-p')(\Gamma-\gamma)}$, valore della cercata gravità specifica del fluido: anzi dall' altra equazione $x=\frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{(\gamma-\gamma')(\Gamma-\gamma')}$ (330) si avrebbe un valore più rigoroso.

334. Può ottenersi la gravità specifica dei fluidi anche con l' *Idrometro*, macchina che consiste in un cilindret-
37 to MN esattamente diviso in piccole parti eguali 1, 2, 3 ec., a cui si attacca il corpo OP composto di due globi, l' uno O maggiore e di sughero, che serve ad aumentare il volume della macchina e a farla perciò galleggiare nel fluido anche il più leggiero, l' altro P minore e d' oro, il quale procurerà alla macchina una situazion verticale, e la costringerà ad affondarsi con tutto il corpo OP nel fluido anche il più grave. Sia $a^2\pi$ la base del cilindro MN, r il raggio del globo O, r' quello del globo P: sarà $\frac{4r^3\pi}{3}$ il volume o solidità di O, $\frac{4r'^3\pi}{3}$ il volume di P (L. 566) e $\frac{4\pi}{3}(r^3+r'^3)$ il volume del corpo OP. Ridotto questo volume ad un cilindro della base $a^2\pi$ e dell' altezza z, si avrà (L. 561) $a^2\pi z=\frac{4\pi}{3}(r^3+r'^3)$, cioè $z=\frac{4}{3a^2}(r^3+r'^3)$;

onde se $a=\frac{1}{3}$, $r=\frac{2}{3}$, $r'=\frac{1}{3}$, sarà $z=4$. Ciò supposto, voglia sapersi per mezzo dell' idrometro la relazione tra le gravità specifiche Γ, Γ' di due fluidi, per esempio del mercurio e dell' acqua piovana: pongo la macchina primieramente nel mercurio e poi nell' acqua, e ne osservo le parti immerse $w=\frac{\gamma v}{\Gamma}$, $w'=\frac{\gamma v}{\Gamma'}$ (328); dunque $w : w' :: \Gamma' : \Gamma$, e perciò $\frac{\Gamma'}{\Gamma}=\frac{w}{w'}$, cioè *le gravità specifiche di due fluidi sono in ragione inversa delle parti dell' idrometro che vi si immergono*. Se dunque egli si affondi nel mercurio fino alla divisione 1, e nell' acqua fino alla divisione 66, i volumi immersi saranno $w=a^2\pi(z+1)$, $w'=a^2\pi(z+66)$, onde $\frac{\Gamma'}{\Gamma}=\frac{z+1}{z+66}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$, e la gravità specifica del mercurio verrà $\Gamma=14$, quella dell' acqua piovana $\Gamma'=1$. Vi sono altri mezzi per costruire un idrometro: ma senza estenderci in altre descrizioni, basti avvertire che coi metodi fin quì spiegati, si formò la Tavola delle densità o gravità specifiche che si è posta al fin della I. Parte, e di cui abbiam parlato più volte.

335. Ed ecco i fondamenti con cui sciolse Archimede il famoso Problema della Corona. La storia è nota, e il problema si riduce a determinare in una mescolanza d' oro e d' argento la quantità dei due metalli. Sieno P, p, Γ, γ, V, v i pesi, le gravità specifiche ed i volumi dell' oro e della corona; si avrà dunque $p-P$ per la quantità dell' argento, il cui volume e gravità specifica sieno v', γ'. Ora $V=\frac{P}{\Gamma}$, $v=\frac{p}{\gamma}$, $v'=\frac{p-P}{\gamma'}$ e $v=V+v'$ perchè si suppone che il volume della corona eguagli i due volumi dell' oro e dell' argento; dunque $\frac{p}{\gamma}=\frac{P}{\Gamma}+\frac{p-P}{\gamma'}$, e $P=\frac{\Gamma p(\gamma-\gamma')}{\gamma(\Gamma-\gamma')}$. Così se il peso della corona era $p=$ 5 *lib.*, posto $\Gamma=19$; $\gamma=17$; $\gamma'=11$, si sarebbe avuto il peso o quantità dell' oro $P=$ *lib.* $4\frac{13}{63}$; e quella dell' ar-

gento $p - P = 5 - 4\frac{13}{68} = \frac{55}{68}$. Questa soluzione però non è esatta, giacchè l' esperienza ha fatta conoscere insussistente in moltissimi casi l' equazione fondamentale $v = V + v'$: infatti un volume V d' oro e un altro v' d' argento non danno dopo la lor liquefazione e mescolanza un volume composto $v = V + v'$, ma alquanto maggiore; altri corpi mescolati ne danno uno minore, e dopo l' osservazioni di Priestley può dirsi che ben pochi sono i fluidi, l' *arie* specialmente, che dopo la mescolanza conservino la somma medesima dei volumi.

35 336. Si è detto che la pressione del fluido contro il corpo immerso DH passa per il centro di gravità del volume FE (324); e di quì nasce tutta la teorìa dell' oscillazioni, situazioni e stabilità dei galleggianti, teorìa sì vantaggiosa nell' Architettura Navale: ma ella è per altra parte sì complicata nei casi anche i più semplici, che non crediamo di doverne parlare in questi Elementi. Rammentiamoci piuttosto che la pressione d' un fluido contro il solido immerso è sempre eguale in ciascun punto di ciascuno strato orizzontale del solido (317), giacchè nulla si cangia nella pressione o sia ella al di dentro del solido o sia al di fuori (315): pertanto se il solido abbia poca estensione, quantunque in rigor matematico i suoi strati inferiori sieno più premuti dei superiori, attesa la colonna del fluido più lunga per quelli che per questi (317), fisicamente però la differenza è nulla e la pressione può dirsi per tutto la stessa. Dunque l' egualità di pressione per tutti i versi potrà ben condensare i solidi se son condensabili, ma non già mutarne l' esterna figura o l' interna disposizion delle parti, che in questa ipotesi debbono scambievolmente resistersi con egual forza e restar perciò nella prima loro situazione. Ora tale è il caso di un debolissimo uovo, o d' un pezzo di cera molle, costretti ad affondarsi dentro il mercurio: tale è il caso degli uomini e degli animali altamente sommersi nell' aria o nell' acqua: l' eguaglianza della pressione non dà luogo al cangiamento delle parti, e poichè non vi è sensazione senza questo cangiamento o moto di parti, gli uomini e gli animali non possono ordinariamente accorgersi della pressione.

Macchine Idrostatiche .

Chiamansi *Idrostatiche* quelle Macchine i cui effetti hanno per fondamento le leggi dell' Idrostatica. Posson ridursi a sei: il *Barometro*, l' *Aerostata*, la *Tromba Pneumatica*, la *Tromba Aspirante*, la *Tromba Premente*, e la *Tromba Aspirante insieme e Premente*. Noi vi aggiungeremo la *Tromba a fuoco* e la *Vite Idraulica d' Archimede* per unir tutte insieme le Trombe o Macchine che servono all' innalzamento dell' acqua.

337. Il *Barometro* è una macchina con cui si misura il peso assoluto dell' aria. Sopra un gran vaso, ove sia del mercurio e dell' acqua, penda verticalmente in modo da potersi alzare ed abbassare un tubo di vetro in varj pezzi ben collegati insieme con mastice, la cui lunghezza sia presso a sei tese, e serratane con una chiave o con altro equivalente riparo l' inferiore estremità, si empia di mercurio fino alla superiore, che si chiuderà poi *ermeticamente*, cioè con la fiamma da Smaltatori. Si cali allora il tubo nel vaso sottoposto, e quando la chiave sarà tutta immersa entro al mercurio, si giri per dar esito al fluido: chi pensasse di vederlo tutto discendere, s' ingannerebbe; il fluido scende per un gran tratto e poi si arresta ostinatamente all' altezza di *poll.* $27\frac{1}{2}$ incirca sopra il livello del mercurio stagnante. Crescerà lo stupore se la macchina si rialzi; appena sarà ella fuor del mercurio che precipiteranno al fondo i pollici $27\frac{1}{2}$, e in loro luogo salirà nel tubo tant' acqua, da occupare un' altezza di *poll.* 385 o *pie.* 32 incirca sopra il livello di quella che è contenuta nel vaso. A questa famosa esperienza del Torricelli è dovuto il barometro.

338. Sieno $A = 27\frac{1}{2}$, $a = 385$ l' altezze a cui si arresta nel tubo il mercurio e l' acqua, $\Gamma = 14$, $\gamma = 1$ le loro specifiche gravità, b l' apertura della chiave o la base comune sopra cui posano le colonne de' due fluidi sospesi; e poichè qualunque sia l' irregolarità del tubo in cui

riposano, la loro pressione è sempre $s = b \times A \times \Gamma$, $s' = b \times a \times \gamma$ (318), avremo $s : s' :: b \times A \times \Gamma : b \times a \times \gamma ::$ $A\Gamma : a\gamma :: 385 : 385$, e però $s = s'$, cioè la pressione del mercurio all' altezza di *poll.* $27 \frac{1}{2}$ eguaglia la pressione dell' acqua all' altezza di *poll.* 385; dunque è una stessa la cagione che sostiene i due fluidi ad altezze sì differenti: ma il mercurio e l' acqua del vaso sono incapaci e di produr quest' effetto perchè le molecule fluide tendono di lor natura a livellarsi, e di produrlo eguale, perchè la resistenza o densità è in loro inegualissima; dunque bisogna ammettere un agente esterno, che gravitando costantemente sulla superficie dei fluidi stagnanti, gli metta in stato di bilanciar lo sforzo dei fluidi sospesi. Ora tale appunto è l' aria ambiente, riconosciuta perciò come vera cagione del fenomeno Torricelliano. Infatti se il tubo col vaso ove stagnano i fluidi si chiuda nel vuoto, manca appena la pressione dell' atmosfera che cessa affatto il fenomeno.

339. Si ha di quì la conferma di quanto altrove dicemmo (310), cioè che in due vasi comunicanti di qualunque figura, un fluido tranquillo si mette ad un livello medesimo. Imperocchè siccome supposta l' aria equilibrata con l' acqua in due tubi diversi, l' acqua nell' uno e nell' altro ha sempre l' altezza di 32 *pie.*; così riuniti i due tubi e supposto l' equilibrio, se l' acqua s' innalzi nell' uno a *pie.* 32, sarà necessariamente all' altezza medesima anche nell' altro: onde chiamando a quest' altezza, ed m un multiplo o summultiplo qualunque di essa, come per le due determinate altezze di 32 *pie.* l' esperienza ci dà l' evidente equazione $a = a$, così abbiamo subito l' altra non meno evidente $am = am$, la quale dimostra che il fluido tranquillo in due tubi comunicanti, ha in ambedue la stessa altezza qualunque ella siasi. Anzi può spingersi anche più oltre il raziocinio; poichè dall' essersi trovata la pressione di *poll.* $27 \frac{1}{2}$ di mercurio eguale a quella di *pie.* 32 d' acqua ovvero $s = s'$ (338), si deduce anche $b \times A \times \Gamma = b \times a \times \gamma$, ovvero $A\Gamma = a\gamma$ oppure $Am\Gamma = am\gamma$, e perciò $mA : ma ::$ $\gamma : \Gamma$, cioè l' altezze qualunque dei due diversi fluidi tranquilli in due vasi comunicanti sono in ragione inversa delle

loro

loro specifiche gravità, e non solo *poll.* $27\frac{1}{2}$ di mercurio fanno equilibrio a *pie.* 32 d' acqua, ma anche *poll.* 55 a *pie.* 64 fatto $m = 2$, e *poll.* $13\frac{3}{4}$ a *pie.* 16 fatto $m = \frac{1}{2}$ ec. Dalla stessa equazione $A\Gamma = a\gamma$, si ottiene $A = \frac{a\gamma}{\Gamma}$, e posto $a = 32$, $\gamma = 1$, e $\Gamma = 0,913$ gravità specifica dell' olio d' uliva, sarà $A = \frac{32}{0,913} =$ *pie.* 35 incirca, altezza a cui si solleverebbe l' olio nel tubo per porsi in equilibrio con l' aria: onde anche nei tubi comunicanti a *pie.* 35 d' olio faranno equilibrio i *pie.* 32 d' acqua o i *poll.* $27\frac{1}{2}$ di mercurio, e la legge stabilita per l' acqua e per il mercurio diverrà generale, e potrà dirsi che *l' equilibrio di due fluidi nei vasi comunicanti dipende dalla ragion dell' altezze inversa a quella delle specifiche gravità*.

340. Può anche osservarsi a questo proposito che il mercurio e l' acqua si debbon sospendere nel tubo Torricelliano alle loro solite altezze o l' esperienza si faccia all' aperto o in una stanza; poichè quantunque in una stanza sovrasti al fluido stagnante una colonna d' aria assai piccola relativamente a quella che gli sovrasta all' aperto, contuttociò l' aria interna comunicando con l' esterna, la stanza è insomma il veicolo di due vasi comunicanti, e i risultati che si ottengono per suo mezzo, non debbon differire dagli immediati. Può aggiungersi che quand' anche la comunicazione tra le due arie fosse interrotta, l' interna però agisce con una forza elastica eguale alla pressione con cui agirebbe l' esterna (311), onde l' effetto delle due eguali cagioni dee necessariamente esser lo stesso. Perciò gli uomini e gli animali respirano egualmente bene e in casa e alla campagna, perciò il fuoco ha una pari attività e negli ordinarj cammini e in mezzo alle strade, perciò l' osservazioni barometriche di cui parleremo tra poco, si trovano eguali o si facciano allo scoperto o nell' angustie d' un gabinetto. E già s' intende che quì trattiamo dell' aria considerata solo come pesante, e prescindiamo dall' altre sue qualità di più o meno sana e depurata.

341. Determiniamo ora il peso totale dell' aria che circonda il Globo Terraqueo. Corrispondendo al peso d' ogni

sottilissima colonna dell' atmosfera il peso d' una colonna di mercurio alta *poll.* 28 incirca ed eguale a quella in diametro (339), tutto il peso dell' atmosfera eguaglierà dun-
33 que il peso d' una zona sferica KGDAEB di mercurio che all' altezza KG di *poll.* 28 cinga d' ogni intorno la superficie terrestre DEK : così la questione è ridotta a misurare in piedi cubici questa zona . Sia CK $= r =$ *pie.* 19631100 il raggio della Terra supposta prossimamente sferica, KG $= r' =$ *poll.* $28 =$ *pie.* $\frac{7}{3}$ l' altezza del mercurio , e CG $= r + r'$ il raggio della sfera composta GAB : saranno dunque $\frac{4\pi}{3}(r + r')^3$ e $\frac{4\pi r^3}{3}$ le solidità delle due sfere GAB, KDN (L. 566), onde sottraendo l' una dall'altra, avremo la solidità della zona KGDAEB $= \frac{4\pi}{3}(3r^2 r' + 3rr'^2 + r'^3)$, la quale trascurati i termini $3rr'^2 + r'^3$ come assai piccoli in confronto dell' altro , e preso $\pi = 3,1416$ (L.520), diventa $4\pi r^2 r' = 11299960765136736$ *pie.* cubici : ma un piede cubico di mercurio pesa *lib.* 980 francesi, come si ha dalla Tavola delle gravità specifiche; dunque il peso totale dell' aria atmosferica sarà *lib. franc.* 11073961549834001280 incirca .

342. Del rimanente , il barometro descritto di sopra (337) non è già l' ordinario ed il più comodo : questo consiste in un tubo di cristallo che con un raggio per tutto eguale di due o tre linee, ha una lunghezza di soli 30. *poll.* Si chiude ermeticamente da un capo, e dopo averlo nettato al di dentro , vi si versa dall' altro un terzo del mercurio destinato ad empirlo ; si scalda allora e si agita , onde esca dal fluido tutta l'aria che vi si annida , e quindi si aggiunge un altro terzo di mercurio ripetendo il caldo e l' agitazione; infine si empie affatto colle stesse cautele, e applicato un dito all' orifizio , si rovescia il tubo , e col dito che lo serra si immerge in un piccolo vaso o *bagno* dello stesso fluido. Allora rimosso il dito, si vede scendere in parte il mercurio contenuto nel tubo, ed arrestarsi al solito verso i *poll.* $27\frac{1}{2}$, con che l' essenziale della macchina che poi si fissa in una tavoletta , è terminato . Ciò fatto, si prende una lastra d' ottone, larga quasi quanto la tavoletta , e la sua lunghezza di tre pollici si divide

 FIG.

dall' una parte in pollici, notandovi d'alto in basso i numeri 29, 28, 27, 26 e distinguendovi le linee; dall'altra poi si divide in 32 parti eguali, e in faccia alla divisione 2ª. in alto si scrive *gran siccità*, alla 6ª. *siccità*, alla 10ª. *tempo stabile*, alla 14ª. *bello*, alla 17ª. che corrisponde a *poll.* $27\frac{1}{2}$, *vario*, alla 20ª. *pioggia o vento*, alla 24ª. *gran pioggia*, alla 28ª. *tempesta*, alla 32ª. *gran tempesta*. Quindi cominciando dalla superficie del mercurio che stagna nel vaso, si contano sulla tavoletta e lungo il tubo *poll.* 26, e a questo punto preciso si fa corrispondere la prima divisione in basso della lastra già preparata, che quì dee fermarsi immobilmente. Ci dispenseremo dall' indagar le ragioni probabili di queste pratiche; le osservazioni costanti di un secolo e mezzo le hanno stabilite per tutti quei luoghi che poco si alzano sopra il livello del mare. Basti il sapere che con questo equipaggio il barometro accenna e spesso anche predice (prescindendo da qualche rara anomalìa) i cangiamenti dell' atmosfera, la quale non varia di peso che dentro i limiti angusti di quasi tre pollici di mercurio, facendolo talora in virtù d' una maggior gravità o anche d'una maggiore elasticità, salire dall' altezza media di *poll.* $27\frac{1}{2}$ fin presso a quella di *poll.* 29, e talora in virtù d' una gravità o elasticità minore, obbligandolo a scendere fin presso ai 26.

343. La graduazione però che abbiamo assegnata al barometro, cessa di esser costante se dal luogo ove si son fatte le osservazioni, si trasporti la macchina ad altri luoghi considerabilmente più alti o più bassi. La ragione è manifesta; poichè scemando nel primo caso e crescendo nel secondo la colonna d' aria che gravita sul mercurio, è forza che questo al minor peso si abbassi, ed al maggiore s' innalzi. È nato di quì l' ingegnoso pensiero di misurar col barometro l' altezza dei monti, purchè sieno date l' altezze A, a del mercurio al piede G e alla cima E di essi, 34
e si conosca la gravità specifica Γ dell' aria nella pianura ZGN. Infatti chiamando $GE = x$ l' altezza cercata, e dx l' altezza infinitesima dello strato o molecula aerea in E, sarà la total pressione dell' aria $s = b \times \int \gamma dx$ (311): ma questa pressione è bilanciata dalla colonna del barometro, il cui peso (338) è il prodotto della base comune b, dell' al-

tezza nota a o della gravità specifica del mercurio che faremo 1, prendendola per termine di comparazione, come si prese sopra (331) quella dell'acqua; dunque poichè or ora abbiam detto che a scema al crescer di x, sarà $b \times \int - \gamma dx = b \times a \times 1$, ovvero $\int - \gamma dx = a$. Ora le specifiche gravità dell'aria son proporzionali alle pressioni (312) o alle colonne barometriche (338); dunque $\Gamma : \gamma :: b \times A \times 1 : b \times a \times 1 :: A : a$, onde $a = \frac{A\gamma}{\Gamma} = \int - \gamma dx$. Differenziando pertanto quest' equazione ove γ è variabile (311), verrà $- \gamma dx = \frac{A d\gamma}{\Gamma}$, $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{-\Gamma dx}{A}$; ed integrando (L. 856), $L\gamma = - \frac{\Gamma x}{A} + Cost.$: ma in G a piè del monte, si ha $x = o$ e $\gamma = \Gamma$, onde $Cost. = L\Gamma$; dunque $L\gamma = - \frac{\Gamma x}{A} +$

34 $L\Gamma$, ovvero $L \frac{\gamma}{\Gamma} = - \frac{\Gamma x}{A}$. Pertanto richiamando quì il numero e, il cui logaritmo iperbolico $= 1$, potrà farsi (L. 852) $L \frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{-\Gamma x L e}{A}$ o togliendo i logaritmi, $\frac{\gamma}{\Gamma} = e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$, e perciò $\gamma = \Gamma e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$, con che γ è data per x come bisognava (311), e si potrà quindi effettuar l' integrazione nella formula $\int - \gamma dx = a$, che diviene $a = - \Gamma \int e^{\frac{-\Gamma x}{A}} dx = A e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$ (L. 923), e presi i logaritmi, avremo $La = LA - \frac{\Gamma x}{A}$, onde infine $x = \frac{A}{\Gamma} L \frac{A}{a}$, altezza richiesta.

Se dunque si determini accuratamente con una immediata esperienza la specifica gravità Γ dell' aria nel livello ZGN, avendo riguardo per quanto è possibile alle varie modificazioni del caldo, del freddo, dei vapori ec., si calcolerà l' equazione $x = \frac{A}{\Gamma} L \frac{A}{a}$ per mezzo dei logaritmi, ridu-

cendola a $Lx = L\frac{A}{\Gamma} + LL\frac{A}{a}$, ed osservando che x è un logaritmo iperbolico e dee perciò moltiplicarsi per 0,43429 (L. 305), onde si cangi in ordinario: allora l' equazione da calcolarsi diventerà $Lx = LA - L\Gamma + LL\frac{A}{a} - L\,0{,}43429$. Sia per esempio la specifica gravità del mercurio 1, quella dell'aria $\Gamma = 0{,}00009196$, $A = lin.\ 337$, $a = lin.\ 191$: avremo

$$\begin{aligned}
LA &= 2{,}5276299 \\
La &= 2{,}2810334 \\
\text{Resto} = L\frac{A}{a} &= 0{,}2465965 \\
LA &= 2{,}5276299 \\
L\,0{,}24 \text{ ec.} = LL\frac{A}{a} &= 9{,}3919870 \\
\text{somma} &= 11{,}9196169 \\
L\Gamma &= 5{,}9635990 \\
L\,0{,}43 \text{ ec.} &= 9{,}6377843 \\
\text{somma} &= 5{,}6013833
\end{aligned}$$

diff. delle due somme $Lx = 6{,}3182336 = L.lin.2080816 = L\,tes.\ 2408$, onde l' altezza cercata $x = tes.\ 2408$.

344. Ora se con questo o con altro metodo sia già nota un' altezza b, e si sieno osservate alla cima ed al fondo di essa l' altezze A', a' del barometro e la gravità specifica Γ' dell' aria, il calcolo per un' altra altezza ignota sarà più breve. Poichè avendosi in tal caso $b = \frac{A'}{\Gamma'} L\frac{A'}{a'}$, ed essendo per altra parte $A : \Gamma :: A' : \Gamma'$ come poco fa si è veduto (343), verrà $\frac{A}{\Gamma} = \frac{A'}{\Gamma'} = \frac{b}{LA' - La'}$, e quindi $x = \frac{b(LA - La)}{LA' - La'}$, ove i logaritmi son di lor natura ordinarj perchè il numero 0,434 ec. moltiplica x e b. Calcolata dunque una volta la quantità costante $\frac{b}{LA' - La'}$, che quasi al livello del mare fu trovata di $tes.\ 9764{,}94 = m$, nelle par-

ticolari occorrenze non dovrà farsi il calcolo che di $x = mL\frac{A}{a}$ d'onde avremo x in tese. Per altro questi metodi di misurar l'altezze son soggetti a qualche eccezione, e ne abbiamo altrove insinuati i motivi (313).

345. Per prevenire queste eccezioni si sono adoperate talora unitamente al barometro due altre macchine assai comuni, il *Termometro*, e l' *Igrometro*, l'una per misurare il caldo e la dilatazione dell' aria, l'altra per misurarne l'umidità; e col loro mezzo, osservato una volta al piede e alla cima dell' altezza b lo stato dell' atmosfera, si è procurato di aver presso a poco lo stato medesimo, allorchè si è voluta misurare l'altezza ignota x. Ed è ben vero che qualche lume sullo stato attuale dell' atmosfera può ottenersi da queste macchine: ma sarebbe in errore chi contasse di ricavarne delle cognizioni sicure e precise. Il caldo ed il freddo che dilatano e condensano il mercurio del termometro, dilatano anche e condensano il tubo che lo contiene, e ciò turba necessariamente la natural salita e discesa del fluido: il peso medesimo di questo fluido cospira con la sua discesa, e si oppone alla sua salita, onde il freddo dee comparirvi maggior del vero, e minore il caldo: infine perchè dagli eguali gradi del termometro sono indicate delle eguali dilatazioni o ristringimenti del mercurio, potrà egli inferirsi che sieno indicati dei gradi eguali di caldo e di freddo? bisognerebbe prima aver dimostrato che il caldo ed il freddo crescono nella medesima proporzione in cui il fluido si dilata e si condensa, mentre all' opposto è molto probabile che un caldo ed un freddo più grande trovino una difficoltà sempre maggiore a dilatare e a condensare un medesimo fluido.

L' Igrometro è ancor meno esatto: il migliore che si fa con una cordicella di canapa, conserva per un tempo notabile l' umidità che attrasse dall' atmosfera, e questa ha cangiato spesso il suo stato, prima che la macchina possa darne alcun segno. I gradi dell' igrometro sono nel caso stesso di quelli del termometro, non essendo verisimile che l' umidità e la siccità sieno appunto proporzionali alla tensione e al rilasciamento della corda. Infine laddove si pretende di aver trovati nella congelazione e nell' ebullizione dell' acqua due termini fissi per graduare i termometri e renderli paragonabili, non si è potuto fin quì sco-

prire alcun limite certo nell' umido e nel secco per procurare un simil vantaggio all' igrometro, che è restato perciò una macchina inutile o di semplice curiosità.

Non parleremo dell' *Eudiometro*, perchè non riguarda punto il nostro soggetto; e solo per cautela di chi si fidasse troppo d' un sì bel nome e delle lodi straordinarie che alcuni Chimici hanno date a questa macchina, avvertiremo che l' eudiometro, il quale secondo l' etimologìa dovrebbe misurar la bontà o salubrità dell' aria, ci ha fatto vedere che l' aria d' una palude è tanto buona quanto quella d' una collina, e forse anche migliore: ciò basta per concludere che vi è tra i moderni Chimici chi non cede in fanatismo agli antichi.

346. L' *Aerostata* o *Globo Aerostatico* volgarmente detto *Pallone Volante*, è una macchina con cui si crede di potere un giorno viaggiar per aria, come si viaggia ora per acqua. Quelli che lo empirono d' aria infiammabile, e sostennero esser questa la miglior maniera di costruirlo, non conobbero probabilmente nè la difficoltà di procacciarsi in copia quest' aria, nè il pericolo di veder la macchina subitamente accesa ed incenerita dall' elettricismo atmosferico. Si costruisce dunque ordinariamente col vapor della fiamma, che formando insieme col suo inviluppo un volume assai più leggiero d' un egual volume d' aria comune, cede alla pressione del fluido ambiente e si solleva tramezzo ad esso, finchè non giunga ad uno strato d' aria della sua stessa specifica gravità (326). Ora la formula $x = mL\frac{A}{a}$ (344) si applica mirabilmente alla teorìa dei Globi aerostatici. Poichè essendo (343) $A : a :: \Gamma : \gamma :: \Gamma \times 70 : \gamma \times 70$, ed esprimendosi il peso d' un *pie.* cubico d' aria da $\Gamma \times 70^{lib.}$ nella pianura, e da $\gamma \times 70^{lib.}$ nell' altezza x, fatto $70\,\Gamma = P$, $70\,\gamma = p$, si avrà $x = mL\frac{P}{p}$. Si dica poi: se all' altezza x il peso p corrisponde ad un *pie.* cubico d' aria, il peso Π del globo a quanti *pie.* cubici V corrisponderà? cioè $p : 1 :: \Pi : V$, onde $p = \frac{\Pi}{V}$, e sostituito questo valore nell' equazione, verrà $x = mL\frac{PV}{\Pi}$, ove $m = 9764{,}94$ (344), P è il peso in libbre francesi d' un *pie.*

cubico d' aria alla pianura, Π è il peso assoluto del globo parimente in *lib.* francesi, V è il suo volume in *pie.* cubici, ed x l' altezza a cui dee sollevarsi espressa in *tese* (344). Date pertanto due qualunque delle tre quantità x, Π, V, si conoscerà subito l' altra, giacchè P si ha sempre dall' equazione $70\,\Gamma = P$: sicchè la formula contiene tutto ciò che può mai richiedersi intorno all' innalzamento dei Globi aerostatici, fuorchè le curiose ricerche della celerità con cui s' innalzano e del tempo che spendono ad innalzarsi, del che non intendiamo quì di parlare.

Vogliasi, per esempio, il volume d' un Globo che col peso di *lib.* 3500 debba sollevarsi all'altezza di *pie.* 10000. Osservata la gravità specifica dell' aria nella pianura, si trovi $\Gamma = 0{,}00106$; sarà dunque $70\,\Gamma = P =$ *lib.* 0,0742, $\Pi = 3500$, $x =$ *pie.* 10000 $=$ *tes.* $1666\frac{2}{3}$, e la formula diverrà $1666\frac{2}{3} = 9764{,}94\,(L\,0{,}0742 + LV - L\,3500)$, onde $LV = \frac{500000}{2929482} + L\,3500 - L\,0{,}0742$: ma $\frac{500000}{2929482} = 0{,}1706786$, $L\,3500 = 3{,}5440680$ e $L\,0{,}0742 = 8{,}8704039$; dunque $LV = L\,69878$, e perciò V $=$ *pie. cub.* 69878. Se dunque il raggio del Globo sia r, si avrà il suo volume o solidità $V = \frac{4r^3\pi}{3} = 69878$, onde $r = \sqrt[3]{\frac{1048170000}{62832}} =$ *pie.* 26 incirca.

Ma finchè non si trovi il metodo di dare a queste macchine la direzione che più ci piaccia, e di mantenerle nel buon cammino a dispetto del frequente ostacolo delle correnti dell' aria, i Globi aerostatici non saranno che un divertimento puerile o una nuova sorgente di disgrazie e di morte per quei temerarj che avranno osato di avventurarvisi. Ora non è sì facile di ritrovar questo metodo: le navi comuni viaggiano tra due elementi, l' aria e l' acqua marina, le cui specifiche gravità sono come 1 a 1030, onde nei casi ordinarj la parte sommersa della nave trova nell' acqua un fortissimo punto d' appoggio che bene adoperato rende vana la violenza dell' aria e conserva alla nave la sua direzione; i Globi al contrario nuotano tra due arie la cui gravità specifica è sensibilmente la stessa, e quando

e quando pur si munissero d' una forza interna grandissima, ella probabilmente non eguaglierà mai in proporzione la forza che la natura ha data agli uccelli, i quali intanto o non si espongono agli impeti furiosi del vento o son costretti ad abbandonarvisi ciecamente.

347. La *Tromba Pneumatica* è una macchina per cui mezzo si toglie l'aria da un recipiente, e vi si fa il vuoto; non che l'aria ne venga mai tolta interamente o che vi si faccia un vuoto perfetto: ma la densità del fluido vi è tanto diminuita, che nell'ordinarie esperienze può riguardarsi per nulla. Ci dispenseremo dal descriver questa macchina a cui si son date più forme; ella è sì comune che poco vi vuole a vederla, e il vederla una volta vale assai più d'una lunghissima descrizione. Le sue parti essenziali sono la *campana* o *recipiente* che si vuota d'aria, il *piatto* sopra cui egli posa, la *tromba* che comunica col recipiente, l'*animella* o *embolo* che va su e giù per la tromba, e la *chiave* che permette all'aria del recipiente di passar nella tromba, ma le vieta di ripassar dalla tromba nel recipiente. Il primo movimento o *colpo* dell'embolo fa nascer nella tromba uno spazio senz'aria in cui si estende subito l'aria del recipiente, ed in tal guisa quest'aria già comincia a rarefarsi: cresce la rarefazione a misura che crescono i colpi dell'embolo, e giunge infine a tal segno che differisce appena dal vero vuoto.

L'unico problema che in proposito di questa macchina sì fertile di fisiche cognizioni, interessi il nostro soggetto, è il determinar la proporzione tra le densità o gravità specifiche Γ dell'aria esterna e $\gamma = 1$ dell'aria del recipiente dopo un numero n di colpi dell'embolo: e a questo pure soddisfà la solita formula $x = m\text{L}\frac{A}{a} = \frac{b(\text{L}A - \text{L}a)}{\text{L}A' - \text{L}a'}$ (344) che solo ha bisogno di essere adattata al nostro caso. Si immagini pertanto un barometro chiuso nel recipiente, e si supponga che il mercurio situato all'altezza $A' = A$ prima di muover l'embolo, scenda all'altezza a' dopo 1 colpo di esso, e all'altezza a dopo n colpi; dunque le due discese del mercurio sono egualmente prodotte e dai colpi 1 ed n dell'embolo, e dall'altezze b ed x a cui si trasporta il barometro (343); dunque poichè le cagioni che producono lo stesso effetto sono eguali, si avrà $1 : b ::$

$n : x$, onde $\frac{x}{b} = n$. Ora avendosi $A : a :: \Gamma : \gamma$ (343), ed $A' : a' :: \Gamma' : \gamma' :: v' : V'$ (305), giacchè la massa M d'aria chiusa da principio nel recipiente, è la stessa che la massa *m* divisa tra il recipiente e la tromba dopo il primo colpo dell' embolo, sarà $\frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{\Gamma}{1} = \Gamma$, ed $\frac{A'}{a'} = \frac{v'}{V'}$: ma i volumi V', v' che occupa l'aria del recipiente quando il mercurio è in A', a', cioè quando l'embolo o non si è mai mosso o si è mosso la prima volta, son determinati l'uno dalla capacità R del recipiente, l'altro dalla somma S delle capacità del recipiente e della tromba; dunque $\frac{A'}{a'} = \frac{v'}{V'} = \frac{S}{R}$. Sostituiti perciò questi valori nella formula $x = \frac{b(LA - La)}{LA' - La'}$ che si riduce ad $\frac{x}{b} L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a}$, avremo $nL\frac{S}{R} = L\Gamma$, equazione che scioglie il problema. Così supposta 5 la capacità del recipiente, 2 quella della tromba, e 10 i colpi dell' embolo, sarà $R = 5$, $S = 7$, $n = 10$ e $L\Gamma = 10\,L\frac{7}{5} = 1{,}4612800 = L\,29$ incirca, onde $\Gamma = 29$, cioè l'aria esterna sarà 29 volte più densa di quella del recipiente. È manifesto che l'equazione contenendo le quantità Γ, n, R, S, se tre qualunque di esse sieno note, si troverà subito l'altra.

38 348. La *Tromba Aspirante* è composta 1°. di due tubi di metallo uniti insieme, l'uno AN ordinariamente più ampio dell'altro NT che con la sua inferiore estremità è immerso sotto il livello XY dell'acqua: 2°. d'una valvula O che può aprirsi solamente all'insù e che si fissa o nel piano MN ove i due tubi si uniscono, o anche nel livello TV: 3°. di un embolo CGHI guarnito di una simil valvula, il quale combaciando esattamente col tubo AN, impedisce ogni accesso all'aria esterna, e facendosi alternativamente salire e scendere per mezzo d'una leva DC, percorre un certo spazio fisso HL tale, che LN sia minore di NV. Segue da tal meccanismo che se una forza applicata in D alzi l'embolo fino in KL, l'aria atmosferica contenuta in MI, occuperà tutto lo spazio ML, onde subito

FIG. 38

sbilanciandosi l' aria più densa racchiusa in TN, entrerà per la valvula O, e tutta l' aria TI sparsa uniformemente per TL, diverrà più rara dell'aria esterna, che con l'eccesso della sua pressione obbligherà l' acqua XY a sollevarsi nel tubo ad un' altezza RS corrispondente a questo eccesso: allora se si abbassi l'embolo, l'aria tornando a comprimersi, forzerà le valvule O, G, l'una a chiudersi, l'altra ad aprirsi, e per questa uscirà; perciò se l' embolo nuovamente s' innalzi, l' acqua per la stessa ragione salirà più alto nel tubo, e dopo un certo numero di simili movimenti, toccherà l' embolo, passerà per la valvula G, e giungerà finalmente a versarsi per lo sfogo F.

349. Ora per determinar l'altezza dell' acqua a ciascun colpo dell' embolo, sia $TM = a$ la lunghezza del tubo inferiore TN il cui diametro $TV = 2r'$; sia $HK = a'$ l' altezza fissa per cui scorre l' embolo nel tubo superiore MB, il cui diametro $MN = 2r$; e sia $MH = d$ la minima distanza dell' embolo dalla base MN: se si chiamino $TR = x$, $RP = y$ l' altezze dell' acqua dopo i primi due colpi dell' embolo, sarà $RM = a - x$, $PM = a - x - y$, $MK = a' + d$, e le solidità o volumi dei cilindri $MI = \pi dr^2$, $ML = \pi r^2 (a' + d)$, $RN = \pi r'^2 (a - x)$, $PN = \pi r'^2 (a - x - y)$ (L. 561). Fatte pertanto Γ, Γ' le gravità specifiche dell' acqua e dell' aria, b la base TV della tromba, e $q = 32$ l' altezza della colonna d' acqua che fa equilibrio alla corrispondente colonna d' aria atmosferica della tromba (337, onde si abbia $s = b\Gamma q$ per la forza o pressione di questa (309), considero gli effetti del solo secondo colpo dell' embolo quando l' acqua è già in RS, ed osservo 1°. che l' aria della tromba dopo il primo colpo dell' embolo non è più atmosferica, e che la gravità specifica Γ' è divenuta Γ'', giacchè per ristabilir l' equilibrio l'acqua è salita in RS, ed alla forza s' dell' aria interna si è dovuta aggiungere tutta la forza $b\Gamma x$ del cilindro aqueo TS; dal che si ha $s' + b\Gamma x = b\Gamma q$ ed $s' = b\Gamma (q - x)$: 2°. che condotto l' embolo da HI in kl, ove suppongo che l' aria atmosferica MI divenga omogenea con la già rarefatta RN, se l' embolo si alzi quindi in KL, l' acqua giungerà in PQ; onde quella massa d' aria $p' = P'$ che avea un volume $v' = MI$, ne ha ora uno $V' = Ml$, e quella massa $p = P$ che avea un volume $v = RN + Ml$, ne ha ora uno $V = PN + ML$: 3°. che la forza s''

FIG.

dell' aria interna dopo il secondo colpo dell' embolo, è divenuta ancor più debole e che la gravità specifica Γ'' è divenuta Γ''', poichè per aver l' equilibrio se le è dovuta unire la forza $b\Gamma x + b\Gamma y$ del cilindro aqueo TQ; dal che
38 abbiamo $s'' + b\Gamma x + b\Gamma y = b\Gamma q$, ed $s'' = b\Gamma(q - x - y)$. Ciò supposto, essendo le forze elastiche dell' aria proporzionali alle sue gravità specifiche (312), si avrà $b\Gamma q : b\Gamma(q - x) :: \Gamma' : \Gamma'' :: \frac{p'}{v'} : \frac{P'}{V'} :: V' : v' :: Ml : MI$, onde $Ml = \frac{\pi d q r^2}{q - x}$: e parimente $b\Gamma(q - x) : b\Gamma(q - x - y) :: \Gamma'' : \Gamma''' :: \frac{p}{v} : \frac{P}{V} :: V : v :: PN + ML : RN + Ml$, ovvero sostituendo i valori, fatto $\frac{r}{r'} = m$ e riducendo, $q - x : q - x - y :: a - x - y + m^2(a' + d) : a - x + \frac{dqm^2}{q - x}$, e di quì l' equazione I^a. $y^2 - [a + q + m^2(a' + d) - 2x]y = m^2x(a' + d) - a'm^2q$. Posto dunque per compendio $a + q = n$, $a' + d = a''$, verrà l' equazione II^a. $y = \frac{n + a''m^2 - 2x \pm \sqrt{[(n + a''m^2 - 2x)^2 + 4m^2(a''x - a'q)]}}{2}$: ma supposta l' acqua nel livello XY, nel qual caso $x = 0$, e preso il radicale col segno negativo (giacchè il positivo darebbe $y > q$, e l' altezza dell' acqua nella tromba avrebbe una forza più grande di quella dell' aria atmosferica che ve la sostiene) si otterrà l' equazione III^a. $y = \frac{n + a''m^2 - \sqrt{[(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2q]}}{2}$, che determina l' altezza TR dell' acqua o l' effetto del primo colpo dell' embolo. Questo valore sostituito in luogo di x nella II^a. equazione darà l' effetto del secondo colpo o l' altezza RP dell' acqua, e nuovamente sostituendo in luogo di x la somma dei due valori trovati, avremo l' effetto del terzo colpo ec. Così se sia $q =$ *pie.* 32, $r = 6$, $r' = 3$, onde $m = 2$, $a = 25$, $d = 0$, onde $n = 57$, ed $a' = a'' = 2$, si troverà l' effetto del primo colpo o l' altezza TR $= y = \frac{65 - \sqrt{(65^2 - 32^2)}}{2} = 4{,}25$ in circa, che posto in luogo di

 FIG. 38

x nella II^a. equazione, dà l'altezza $RP = y = 4,25$, eguale presso a poco alla prima.

350. Dunque 1°. se si voglia una tromba *perfetta* in cui cioè l'acqua al primo colpo dell'embolo si alzi fino alla valvula O, sarà $a = y$; e sostituito y in luogo di a nella I^a. equazione, supponendo al solito l'acqua in XY, cioè facendo $x = 0$, verrà $y = a = \frac{a'm^2q}{q + m^2(a + d)}$. Data pertanto al tubo TN questa lunghezza, si avrà la richiesta tromba perfetta, e coi valori presi di sopra (349), si troverebbe che dee farsi $TM = a = 6\frac{2}{5}$. Ma quì si osservi una volta per sempre, che se la tromba sia collocata in un luogo sensibilmente più basso o più alto di quello, ove il barometro indica *poll.* $27\frac{1}{2}$ incirca, non si avrà più per l'acqua la corrispondente altezza $q = 32$: supposto dunque che il barometro segni un numero n di linee al di sopra o al di sotto dei *poll.* $27\frac{1}{2}$, il vero valor di q si fisserà facendo $q = 32 \pm 14n$, posta la gravità specifica dell'acqua a quella del mercurio come 1 a 14.

351. Dunque 2°. se il numeratore e il denominator del rotto $\frac{n + a''m^2 - \sqrt{[(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2q]}}{2}$ si moltiplichi per $n + a''m^2 + \sqrt{[(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2q]}$, la III^a. equazione diverrà $y = \frac{4a'm^2q}{2(n + a''m^2) + 2\sqrt{[(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2q]}}$; e perciò l'innalzamento dell'acqua al primo colpo dell'embolo sarà tanto più grande, quanto più son grandi a', m, e quanto più son piccole a, d (L. 48). Usando lo stesso artifizio nell'equazione II^a., e fatto $dx = a'z$, verrà $y =$
$$\frac{4a'm^2(q - x - z)}{2(n + a''m^2 - 2x) + 2\sqrt{[(n + a''m^2 - 2x)^2 - 4a'm^2(q - x - z)]}},$$
onde dovendo y esser positivo, lo sarà anche $q - x - z$, e quindi i successivi innalzamenti dell'acqua saranno, come prima, tanto più grandi, quanto son più grandi a', m, e quanto son più piccoli a, d: cioè in generale *l'acqua si innalzerà, tanto più nella tromba, quanto sarà più stretto e più corto il tubo* TN *in paragon del tubo* MB, *quan-*

38 *to sarà più lungo il tratto* HK *per cui scorre l' embolo*, *e quanto sarà più piccola la distanza* MH *dell' embolo dalla base* MN.

352. Dunque 3°. supposto che l'acqua abbia già ricoperta la valvula situata in TV e si trovi in RS, è chiaro che ella cesserà di salire subito che la forza dell' aria contenuta nel volume RN + ML unita al peso del cilindro aqueo TS, farà equilibrio alla pressione dell' atmosfera. Per determinar questo caso, osservo che trovandosi la valvula in TV, l'aria dopo il primo colpo è tornata a comprimersi (348), e per tutto lo spazio RI è atmosferica, onde in un volume v ha la forza $b\Gamma q$ (349): ma l' aria in RL è più rara ed in un volume V ha una forza ignota s; dunque (349) $b\Gamma q : s :: V : v ::$ RN + ML : RN + MI, e però $s = \frac{b\Gamma q(RN + MI)}{RN + ML} = \frac{b\Gamma q(a + dm^2 - x)}{a + m^2(a' + d) - x}$, a cui aggiungendo il peso $b\Gamma x$ del cilindro aqueo TS e facendo $a + dm^2 = n$, avremo infine $b\Gamma x + \frac{b\Gamma q(n - x)}{n - x + a'm^2} = b\Gamma q$, equazione da cui si deduce $x = \frac{a'm^2 + n - \sqrt{[(a'm^2 + n)^2 - 4a'm^2q]}}{2}$, e però l' acqua cesserà di salire tutte le volte che il valor di x sarà reale. Ora ciò rende inutile la tromba; dunque *supposta la valvula in* TV, *affinchè l' acqua continui ad alzarsi*, *è necessario che si abbia* $4a'm^2q > (a'm^2 + n)^2$ *o che la radice dell' equazione sia immaginaria*. Così presi i valori di sopra (349), sarà $4a'm^2q = 32^2$ ed $(a'm^2 + n)^2 = 33^2$, e perciò l' acqua cesserà di salire: ma posto $m = 3$, verrà $4a'm^2q = 2304$, ed $(a'm^2 + n)^2 = 1849$, onde l' acqua continuerà ad innalzarsi.

353. Dunque 4°. se supposta la valvula in O, e l'acqua in Z, si cerchi il caso medesimo del suo arresto nella tromba, fatto TZ $= x$, sarà ZH $= a + d - x$, ZI $= \pi r^2 (a + d - x)$, ZK $= a + a' + d - x$, ZL $= \pi r^2 (a + a' + d - x)$, e poichè si ha come prima (352) $b\Gamma q : s ::$ ZL : ZI $:: a + a' + d - x : a + d - x$, e però $s = \frac{b\Gamma q(a + d - x)}{a + a' + d - x}$, aggiunto il peso del cilindro aqueo TW $= b\Gamma x$, verrà l' equazione $b\Gamma q = b\Gamma x + \frac{b\Gamma q(a + d - x)}{a + a' + d - x}$ da cui

si ottiene $x = \frac{a + a' + d - \sqrt{[(a + a' + d)^2 - 4a'q]}}{2}$, come si avrebbe anche dall'equazione di sopra (352) fatto $m = 1$. Pertanto anche in questo caso, cioè *supposta la valvula in O, la tromba produrrà sicuramente il suo effetto se si abbia* $4a'q > (a + a' + d)^2$ *o la radice dell' equazione sia immaginaria*. 38

354. Dunque 5°. se voglia determinarsi la forza f necessaria all' innalzamento dell' embolo, quando l' acqua è giunta in ΔΠ e comincia a versarsi per F, si chiamerà HI $= b$ la base dell' embolo, HΔ $= c$ l' altezza del cilindro aqueo sull' embolo, e si osserverà che posta S la pressione che resiste al suo innalzamento, ed s quella che lo seconda, vi sarà equilibrio tra la forza f ed il peso dell' embolo, quando si abbia $f = S - s$. Ma la pressione S è prodotta dal peso P dell' embolo, dal peso $b\Gamma c$ della colonna aquea HΠ, e dal peso $b\Gamma q$ dell' atmosfera, onde $S = P + b\Gamma(c + q)$: e la pressione s nasce dalla forza con cui l' atmosfera gravitando sopra XY spinge contro l' embolo la colonna aquea TI, e perciò è prodotta dal peso stesso $b\Gamma q$ dell' atmosfera meno il peso $b\Gamma(a + d)$ della colonna aquea TI (349), onde $s = b\Gamma(q - a - d)$; dunque $f = S - s = P + b\Gamma(a + c + d)$, cioè la forza necessaria all' equilibrio, eguaglia i pesi dell' embolo e d' un cilindro d' acqua che abbia per base il piano HI dell' embolo stesso e per altezza la distanza TΔ del livello XY dallo sfogo F: perciò se si aumenti la forza d' un terzo del suo valore, onde vinca gli attriti e passi dall' equilibrio al moto (227), si avrà l' innalzamento dell' embolo con una forza $f = \frac{4P + 4b\Gamma(a + c + d)}{3}$. Del resto quando la tromba versa l' acqua uniformemente, e si conosce in pollici il diametro HI $= 2r$ dell' embolo, e lo spazio n che egli scorre in 1″ salendo, è chiaro che si alzerà in questo tempo un cilindro d' acqua di base πr^2 e d' altezza n, onde lo scarico m dell' acqua in 1″ si troverà $m = \pi r^2 n$ *poll. cub.*

355. La *Tromba premente* è presso a poco la stessa tromba aspirante rovesciata, le cui valvule si aprono al solito all' insù, ed il cui tubo MABN è immerso nell' acqua. L' essenzial differenza è 1°. che *la tromba premente*

non dipende dall' azione dell' aria e però non è sottoposta come l' aspirante (351. 352. 353) *ad alcun caso d' insufficienza:* 2°. che laddove l' acqua nell' aspirante non può alzarsi più di *pie.* 32 (348), *nella tromba premente l' acqua s' innalza ad un' altezza qualunque*, purchè si applichi all' embolo una forza proporzionata. Infatti immaginando rovesciata la tromba TB, se si muova l' embolo all' in-
38 giù, l' acqua premuta ne forza la valvula G, passa nella tromba LM e si mette a livello coll' acqua esteriore (310); e se si spinga l' embolo all' insù, si chiude la valvula G, l' acqua contenuta in LM urta la valvula O ed entra nel tubo MV, onde è chiaro che continuando il movimento, l' acqua è costretta a salire indefinitamente. La forza necessaria all' equilibrio con l' embolo eguaglia manifestamente i pesi dell' embolo e del cilindro aqueo, che ha per base il piano dell' embolo e per altezza la distanza del livello dallo sfogo, come nella tromba aspirante.

356. La *Tromba Aspirante insieme e Premente* è la combinazione delle due fin qui descritte. Poco sotto all' ultimo limite HI a cui scende l' embolo, è unito al tubo MB un altro tubo ΣΘ in cui è la valvula Σ che si apre verso Θ, e l' embolo non ha più la valvula G: l' acqua giunge al solito sopra HI, e allora l' embolo scendendo la preme, e la forza ad aprirsi per Σ il passo nel tubo ΣΘ. Anche in questa tromba l' acqua può dunque salire a qualunque altezza; e quanto alla forza totale $f + f'$ con cui l' embolo dee sollevarsi ed abbassarsi, ben si vede che nell' atto dell' innalzamento la pressione S che gli resiste, è prodotta dal peso P di esso e dal peso $b\Gamma q$ dell' atmosfera, mentre la pressione s che lo seconda, nasce come sopra (354) dal peso $b\Gamma q$ dell' atmosfera meno il peso $b\Gamma(a+d)$ della colonna aquea TI, onde $f = S - s = P + b\Gamma q - [b\Gamma q - b\Gamma(a+d)] = P + b\Gamma(a+d)$: ma nell' atto dell' abbassamento, fatta IB $= c$ l' altezza dell' acqua in Θ al di sopra dell' embolo, la pressione S' che gli si oppone, è prodotta dalla resistenza del cilindro aqueo $b\Gamma c$ che unitamente alla colonna atmosferica $b\Gamma q$ si dee sollevare, mentre la pressione s' che lo seconda, nasce dal peso P di esso e dal peso $b\Gamma q$ dell' atmosfera che si appoggia sull' embolo, onde $f' = S' - s' = b\Gamma c + b\Gamma q - P - b\Gamma q = b\Gamma c - P$; dunque $f + f' = b\Gamma(a+c+d)$. Sic-

come

 FIG. 38

come però in tutte le macchine dee avvertirsi che il movimento sia uniforme (227), converrà dunque che si abbia $f = f'$, cioè $P + b\Gamma(a + d) = b\Gamma c - P$, e però $P = \frac{b\Gamma(c - a - d)}{2}$; onde 1°. bisogna che sia $c > a + d$, ovvero $IB > IV$, mentre se $c = a + d$, il peso è nullo, e se $c < a + d$, il peso è negativo, dei quali due casi niuno può aver luogo: 2°. se il livello XY non sia costante, ed ora si abbassi l'acqua, ora s'innalzi, si dovrà diminuire o aumentar P, il che può farsi con pesi amovibili che or si tolgono ed or si aggiungono all'embolo.

357. La *Tromba a fuoco* fa le veci della forza applicata alle trombe finor descritte; poichè se girando la chiave ΞΛ, la canna Λ introduca nel tubo ΓΩ il vapor dell'acqua che bolle nella caldaja ΓΛ, la forza di questo vapore innalzerà l'embolo attaccato in D alla leva DC, e l'altro embolo CG discenderà; quindi se dal vasetto Ψ si scarichi uno spruzzo d'acqua fredda nel tubo ΓΩ, il vapore si condenserà subito in acqua, si ridurrà nel fondo del tubo, e ne lascierà vuota la cavità, onde il peso dell'atmosfera gravitante sull'embolo lo abbasserà, sollevando intanto l'altro embolo CG: così la doppia azione del vapor dell'acqua e del peso dell'aria, tien luogo di forza, e produce senza fatica l'innalzamento dell'acqua nella tromba TΠ. Il tubo ΩΓ ha uno sfogo per cui si vuota il vapor condensato, ed un altro sfogo ha la caldaja ΓΛ per cui l'acqua destinata a cangiarsi in vapore, si mantien sempre ad un'altezza determinata. Senza allungarci a descrivere più minutamente la macchina, ci limiteremo ad osservare che il suo buon effetto dipende dal combinare la pression del vapore e dell'atmosfera coi pesi attaccati alle braccia EC, ED della leva, e dal regolar questi pesi in modo che l'embolo in D, o si alzi o si abbassi, abbia sempre un moto uniforme.

358. Ora per avere un tal moto è necessario che la somma dei momenti di tutte le forze che innalzan l'embolo, eguagli la somma dei momenti di tutte quelle che lo deprimono: perciò se sia $DE = a$, $EC = b$ e si rappresenti con P la somma dei pesi sostenuti dalla leva in C, sarà $P \times CE = bP$ il loro momento (105); e se

38 si chiami $2r$ il diametro dell' embolo in D, πr^2 il suo circolo, q l'altezza del cilindro aqueo che con la base πr^2 eguaglia in peso lo sforzo dell' atmosfera, e v l' altezza d' un altro cilindro aqueo che con la base stessa πr^2 eguaglia in peso lo sforzo del vapore, sarà $\pi qr^2 \times ED = a\pi qr^2$ il momento dell' uno, e $\pi vr^2 \times ED = a\pi vr^2$ il momento dell' altro: ma l' embolo in D è innalzato dai momenti bP, $a\pi vr^2$ del peso e del vapore, diminuiti del momento $a\pi qr^2$ dell' atmosfera che agisce in contrario, ed all' opposto è abbassato dal momento $a\pi qr^2$ dell' atmosfera, diminuito del momento bP del peso che agisce in contrario; dunque $bP + a\pi vr^2 - a\pi qr^2 = a\pi qr^2 - bP$, e però $P = \frac{a\pi r^2(2q - v)}{2b}$, valore che dee darsi a P affinchè il moto dell' embolo abbia la richiesta uniformità. Così se sia $v = pie.\ 40$ in circa, come lo dà l' esperienza, $a = 6$, $b = 3$, $q = 32$, sarà $P = 24\pi r^2$, cioè dovrà eguagliare un cilindro d' acqua alto *pie.* 24 sulla solita base πr^2.

359. La *Vite Idraulica d' Archimede* è un cilindro retto AG di legno, a cui è unito il tubo ACDHKE di
39 metallo che da un punto E della circonferenza FEG sale spiralmente fino ad A intorno al cilindro. Perchè la macchina agisca, è necessario che le spire sieno uniformi o che *l' angolo d' inclinazione* che fa la spira con le circonferenze elementari della superficie cilindrica, sia sempre lo stesso: perciò si avvolga al cilindro un triangolo rettangolo che abbia per un dei lati l' altezza BO e per l' altro la circonferenza FEGIF tante volte ripetuta, quante spire si vogliono nella vite, ed esse uniformemente segnate dall' ipotenusa, determineranno con la lor traccia l' esatta situazione del tubo. Posto ciò, se il cilindro s' inclini all' orizzonte per FGP, e l' orifizio E del tubo immerso nell' acqua si faccia girar di continuo contro l' acqua stessa, ella salirà lungo le spire fino a versarsi per lo sfogo A.

360. Le proprietà di questa macchina tuttochè semplicissima, sono assai difficili a svilupparsi, atteso il moto estremamente composto a cui l' acqua vi è soggettata; basti perciò di indicarne le principali. Dall' orifizio o punto E comune al circolo EGI ed alla spira EKH, si conducano alle due curve le tangenti EP, ER determinatri-

ci dell' angolo costante PER d' inclinazione (359), le 39
quali concorrano in P, R con la retta QR in cui termina il piano orizzontale RT steso per il punto P, ove si segano la tangente circolare EP e il diametro prolungato FGP. Se l'angolo PER che fanno le tangenti, sia minor dell' angolo EPQ che l' arco circolare infinitesimo E, fa con l' orizzonte, è chiaro che l' acqua entrerà per E, e nella direzione di ER scenderà come per un piano inclinato nel piccolo arco della spira, d' onde col meccanismo accennato (359) salirà in A: ma se l'angolo PER eguagli l' angolo EPQ, le rette ER, PQ saranno parallele e perciò orizzontali, onde l' acqua non potrà scendere nella spira, e la macchina resterà senza effetto. Determinata pertanto quella posizion della vite in cui gli angoli EPQ, PER sono eguali, si saprà subito la posizion da evitarsi per ottenere l' innalzamento dell' acqua.

361. Conduco per E l' ordinata EL e il raggio EO, e dai punti L, E sul piano orizzontale RT le rette LS, EQ normali al circolo FEG, e perciò anche normali quella al diametro FG, questa alla tangente EP (L. 531); e per essere LE parallela all' orizzonte, sarà LS = EQ. Sia il raggio OE = R = 1, l' ascissa OL = x, l' ordinata LE = $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, l' angolo FPQ = ϕ inclinazione della macchina, e l' angolo PER = θ (= EPQ per ipotesi) inclinazion della spira alla circonferenza (359). Poichè dunque il triangolo PLS è rettangolo in L, sarà (L. 650) $1 : tang\,\phi :: PL : LS$, onde $LS = EQ = PL\, tang\,\phi$: ma nel triangolo PEQ rettangolo in E, abbiamo $1 : tang\,EPQ :: PE : EQ$; dunque $tang\,EPQ = \frac{EQ}{PE} = \frac{PL\, tang\,\phi}{PE}$. Ora il triangolo OEP rettangolo in E (L. 410) dà $EP : PL :: OE : EL :: 1 : \sqrt{(1 - x^2)}$, onde $\frac{PL}{PE} = \sqrt{(1 - x^2)}$; dunque infine $tang\,EPQ = tang\,\phi \sqrt{(1 - x^2)} = tang\,PER = tang\,\theta$, cioè risolvendo l' equazione e riducendo, $x = \pm cot\,\phi \sqrt{(tang^2\phi - tang^2\theta)}$.

362. Dunque 1°. vi son due casi relativi al doppio segno di x, in cui gli angoli PER, EPQ divenendo eguali, impediscono all' acqua di scendere nella spira per quindi innalzarsi. I due casi sono espressi dai valori dell' ascisse OL, Ol egualmente distanti dal centro O; cosicchè

39 immersa nell' acqua la base FEG fino alle corde EI, *ei*, la macchina sarà del pari inefficace, o per dir meglio saranno EI, *ei* i limiti della sua inefficacia. Se fosse $\theta = \phi$, verrebbe $x = 0$ a cui corrisponde per ordinata il raggio o diametro della base; dunque la macchina non può operare se la base si immerga precisamente fino al diametro. Ma se fosse $\theta > \phi$, si avrebbe x immaginaria, cioè sarebbe impossibile un' ascissa OL in cui l' angolo PER divenisse eguale ed EPQ, e perciò molto più impossibile un' ascissa OL in cui PER fosse minore di EPQ, come è necessario, perchè la macchina agisca (360). D' onde si raccoglie che *quanto son più rare le spire, tanto è più dubbioso l' innalzamento dell' acqua*, e che per l' opposto, la loro poca inclinazione sempre più lo assicura, ciò che anche dalla natura medesima della macchina si manifesta.

363. Dunque 2°. poichè quando $OL = x = \pm \cos\phi \times \sqrt{(tang^2\phi - tang^2\theta)}$, l'acqua non può discendere, converrà per aver l'intento, che resti sommersa almeno tutta la corda $IE = 2\sqrt{(1 - x^2)} = \frac{2\, tang\,\theta}{tang\,\phi}$ (361). Così se sia $\theta = 45°$, $\phi = 53°, 8'$, si avrà $EL = sen\ EG = \frac{tang\ 45°}{tang\ 53°, 8'} = sen\ 48°, 35'$: onde quando il seno si prende da O verso G, l' arco sommerso dovrà essere almeno di $2(48°, 35') = 97°, 10'$, e quando si prenda da O verso F, l' arco sommerso dovrà essere di $360° - 97°, 10' = 262°, 50'$.

364. Dunque 3°. se la corda IE divenisse nulla, cioè s' immergesse tutta la base, sarebbe $IE = \frac{2\, tang\,\theta}{tang\,\phi} = 0$, il che dà due casi: 1°. $2\, tang\,\theta = tang\,\phi \times 0 = 0$, e $PER = 0$, onde il sommerger tutta la base non differisce quanto all'effetto, dal render nullo il costante angolo PER d'inclinazion della spira, e far coincidere la circonferenza del circolo con la spira stessa: ma in questo caso l' acqua non potrebbe alzarsi come è evidente; dunque del pari *non si avrà innalzamento d' acqua, se s' immerga tutta la base*: 2°. $tang\,\phi = \frac{2\, tang\,\theta}{0} = \infty$: ma la tangente infinita corrisponde all' angolo retto (L. 612): dunque $\phi = FPQ$

sarebbe un angolo retto, e perciò non solo la base, ma anche tutta la macchina sarebbe sommersa, nel qual caso è chiara la sua inutilità. Perchè dunque possa l' acqua innalzarsi, è forza che una parte della base ne sia fuori, e allora l' orifizio E successivamente esposto all' acqua ed all' aria, si empirà dell' uno e dell' altro fluido, e lo scarico dell' acqua in A sarà intermittente, quale infatti si osserva.

Non parleremo quì di un' altra macchina assai recente, che dalla catena o fune per cui l' acqua spontaneamente s' innalza, vien detta *Funicolare*: i suoi effetti visibilmente dovuti alla viscosità del fluido, sono in parte distrutti dalla contraria forza di gravità, onde non possono esser mai molto considerabili, e saranno sempre assai inferiori a quelli che si otterrebbero con un sistema qualunque di piccole secchie.



PARTE SECONDA

TEORÌA DE' FLUIDI IN MOTO

Natura de' Fluidi in Moto.

365. Il fluido che quì principalmente abbiamo in vista è l' acqua, e il solo moto del quale intendiamo di parlare, è quello che è prodotto in essa dall' azione non impedita della gravità (302). Come questo è il più utile se sia ben regolato, e può cagionar per l' opposto dei danni immensi, se l' acqua si lasci correre a suo capriccio, i Matematici si sono con molto studio applicati ad osservarne le proprietà e a stabilirne le leggi, benchè le cagioni altrove indicate (303) abbiano fin quì resa vana la più gran parte delle recenti esperienze e delle ingegnose ipotesi, con cui hanno tentato o di sorprendere o di indovinar la natura. Quanto a noi, le ragioni già riportate nel Discorso Preliminare, ci vietano ogni innovazione in questa materia: dobbiamo anzi aggiungere, che l'Idrodinamica, a dispetto delle celebri formule di tanti Geometri, resta sempre una Scienza incerta e precaria; che quelle formule puramente simboliche, non

si piegano, fuorchè in rarissimi casi, ad alcun uso o bisogno; che mancan tuttora alla Scienza i chiari fatti fondamentali come sua base, e i molti fatti accessorj, come modificazioni dei suoi risultati; e che infine le stesse più decantate operazioni di pratica, per quanto un felice esito le abbia canonizzate, non possono senza gran rischio stimarsi assolutamente sicure e ciecamente imitabili. Di tali incertezze convengono ad una voce i famosi Idrodinamici Eulero, Lambert, Bernoulli, Bossut ec.

L' idea completa dell' acqua in moto abbraccia più cose: il *recipiente* da cui ella esce, il *letto* per cui scorre, la *celerità* che vi acquista, e gli *ostacoli* che v' incontra.

366. Grandi ricerche si son fatte sui fenomeni che presenta l' acqua nell' uscire dal piccol foro o *lume* dei suoi *recipienti* o conserve; ed ecco a che può ridursene la più util dottrina. O sia che le molecule aquee si affollino con disordine al foro, o che vi si presentino obliquamente e con opposte direzioni, onde s' impediscano a vicenda l' uscita, è certo che la *vena fluida* vi si contrae, e secondo le più esatte esperienze di Bossut, il *volume* o *portata* o quantità effettiva d' acqua che ne esce, sta alla portata teorica che dovrebbe uscirne, come 5 a 8, o almeno (se il lume sia armato d' un tubo) come 13 a 16: cosicchè esprimendosi evidentemente questo volume dal prodotto dell' area b del foro per la lunghezza l della colonna fluida (L. 561), la portata teorica bl diviene effettivamente $\frac{5bl}{8}$ o $\frac{13bl}{16}$ o in generale $\frac{mbl}{n}$, supposto $m = 5$, $n = 8$, ovvero $m = 13$, $n = 16$.

367. Per altro questo ristringimento di vena che diminuisce le quantità dell' acqua effluente, non ne turba punto l' efflusso, e l' acqua esce dai piccoli lumi dei recipienti coi consueti fenomeni d' un projettile. Per dimostrare questa fondamental verità, suppongo che attesa la piccolezza del lume, gli strati superiori del fluido perdano le loro celerità, e che il fluido perciò eserciti una stessa forza o pressione e quando è in quiete, e quando è in movimento; e benchè tale ipotesi non piaccia ad alcuni Idraulici, se però le conseguenze dedotte da essa, corrispondano ai concordi esperimenti dei più famosi Scrit-

 FIG.

tori, ella, ad onta di quanto è stato detto per impugnarla, dovrà riguardarsi come una legge della natura. Pertanto dai due recipienti AB, CD costantemente pieni, esca l'acqua per i piccoli lumi o *emissarj* E, E' distanti 40
dai livelli A, C di $AE = p$ e di $CE' = \pi$, e si abbiano in un tempo stesso t le portate d'acqua $\frac{mbl}{n}$, $\frac{m\beta\lambda}{n}$ (366). Poichè l'altezza dell'acqua nelle due conserve è costante, le quantità che usciranno da ognuna in tempi eguali, saranno eguali, e il moto dell'acqua nella sua uscita sarà uniforme; si avranno dunque le celerità $c = \frac{s}{t}$, $c' = \frac{s'}{t}$ (22), ed essendo gli spazj $s = EH = l$, $s' = E'I = \lambda$ (366), verrà $c : c' :: l : \lambda$, ovvero $c = \frac{c'l}{\lambda}$: ma le forze o quantità di moto delle due colonne aquee sono $F = cM$, $F' = c'M'$ (23), cioè $F : F' :: cM : c'M' :: \frac{mblc\gamma}{n} : \frac{m\beta\lambda c'\gamma}{n}$ (9.309), e queste forze del fluido in moto si esprimono, secondo la nostra ipotesi, come le forze del fluido in quiete, onde $F = b \times p \times \gamma$, $F' = \beta \times \pi \times \gamma$ (309.320); dunque $bp : \beta\pi :: blc : \beta\lambda c'$ o sostituito il valor di c già trovato, $l^2 : \lambda^2 :: p : \pi$ ed $l : \lambda :: c : c' :: \sqrt{p} : \sqrt{\pi}$, cioè *le lunghezze o celerità delle colonne* EH, E'I *sono come le radici dell'altezze* AE, CE' *dell'acqua*. Ora questo teorema si trova esattamente conforme all'esperienze di quelli stessi, che ne contrastarono il fondamento, per non parlar dell'altre ancor più certe di Michelotti e di Bossut.

368. Segue da ciò che *supposti eguali i tempi* t *e i lumi* b, β, *le portate per questi lumi armati o disarmati* (366) *sono come le radici dell'altezza costante dell'acqua nei recipienti;* poichè fatto $b = \beta$, si avrà $\frac{mbl}{n} : \frac{m\beta\lambda}{n} :: l : \lambda :: \sqrt{p} : \sqrt{\pi}$. Del pari, *supposte eguali le costanti altezze dell'acqua e i tempi, le portate per i lumi* b, β *armati o disarmati saranno come l'aree dei lumi*,

poichè fatto $p = \pi$, sarà $l = \lambda$ ed $\frac{mbl}{n} : \frac{m\beta\lambda}{n} :: b : \beta$.

369. Segue ancora che avendosi $\sqrt{p} : \sqrt{\pi} :: l : \lambda :: c : c'$, e però $p : \pi :: c^2 : c'^2 :: \frac{c^2}{2g} : \frac{c'^2}{2g}$, l'altezza $p = \frac{c^2}{2g}$ (11) sarà la dovuta alla celerità c dell'acqua (70), ove $p = \frac{c^2}{2g}$ è proporzione insieme ed equazione assoluta, che dà l'assoluta misura della celerità dell'acqua nell'uscir dai piccoli lumi, quale la dimostrarono Bossut e Fontana, benchè Parkinson con un raziocinio di cui non sembra soddisfatto, la riduca a $\frac{p}{2} = \frac{c^2}{2g}$. Quindi F $(= b \times p \times \gamma)$ $= b \times \frac{c^2}{2g} \times \gamma$, cioè *la forza della pressione o urto diretto dell'acqua eguaglia il peso d'un prisma d'acqua, la cui base è l'area urtata, e l'altezza è la dovuta alla celerità dell'acqua*. Anche questo importante teorema fu confermato dalle famose esperienze di d'Alembert, di Condorcet e di Bossut.

370. Segue infine che essendo p l'altezza dovuta alla celerità c dell'acqua, le molecule spinte per l'emissario E descriveranno la parabola dell'equazione $S^2 =$
40 $4ps$ (193), in cui il parametro è $4p = 4$AE, l'ascissa EG $= s = q - p$ (fatta l'altezza AG $= q$), e l'ordinata GF $=$ S $= 2\sqrt{[(q-p)p]}$. Quindi se si voglia il punto E a cui corrisponde la massima ampiezza orizzontale GF della parabola, differenziando il valor di GF, si avrà $\frac{d\text{GF}}{dp} = \frac{q - 2p}{\sqrt{[(q-p)p]}} = 0$, onde $p = \frac{q}{2}$, cioè il massimo cercato si ha quando l'emissario E occupa il mezzo dell'altezza AG del recipiente. Il che dimostra 1°. che in tal caso l'ampiezza GF $(= 2\sqrt{[(q-p)p]} = 2\sqrt{\frac{q^2}{4}} = q)$ eguaglia l'altezza AG del vaso: 2°. che aperti due emissarj in KL ad eguali distanze EK $=$ EL $= h$ dal punto medio E, le due parabole KO, LO avranno una medesima ampiezza GO; poichè nella parabola KO

sarà

sarà $GO^2 = 4 AK \times KG = 4 \left(\frac{q}{2} - h\right)\left(\frac{q}{2} + h\right)$, e nel- 40
la parabola LO si avrà del pari $GO^2 = 4 AL \times LG$ $= 4 \left(\frac{q}{2} + h\right)\left(\frac{q}{2} - h\right)$. E qui pure gli esperimenti si trovano sì ben d' accordo con la teorìa, che attese l' altezze quasi sempre mediocri delle conserve, e perciò le celerità non molto grandi del fluido, la curva parabolica non è sensibilmente alterata neppur dalla solita resistenza dell' aria (197).

371. Del resto, supponendo AB la conserva costantemente piena, dal cui fondo G esca l' acqua per muoversi sul piano inclinato GM, se dallo *sbocco* o punto estremo M si conduca l' orizzontale MP fino al prolungamento della verticale AG, sarà AP = NM la *vera altezza dell' acqua sopra lo sbocco*, e l' altezza GA potrà chiamarsi *carico d' acqua*.

372. Il *letto* o *alveo* dell' acque correnti, allorchè formano un *Fiume* o *Canale* (poichè se formino un *Condotto*, questi nomi non hanno luogo) è una cavità naturale o artificiale, aperta in terra o dalla forza dell' acque stesse o dalla mano degli uomini. La parte inferiore dicesi *fondo* o le laterali si chiamano *sponde* o *rive* sulle quali si alzano gli *argini*, se tutta l' acqua non possa correre incassata nel terreno. I letti naturali che sono i più comuni, hanno ordinariamente molte irregolarità nella lor forma, direzione, larghezza e fondo. Se nel caso di escrescenza o *piena*, la tenacità del terreno facesse perfettamente equilibrio all' urto dell' acqua, il fiume avrebbe una *forza esatta* e un *letto stabile:* ma come la resistenza dei terreni rare volte eguaglia il diverso impeto della corrente, onde in un luogo è corroso il fondo e le rive, mentre in un altro son deposti i sassi, le ghiaje, l' arena e la terra; quindi è che i fiumi hanno spesso una forza *troppo grande* o *troppo piccola* e in ambedue i casi un *letto istabile*, d' onde poi nascono le *tortuosità* o serpeggiamenti, i *gorghi* o escavazioni del fondo, i *ridossi* o rialzamenti, le *diramazioni* ec.

373. Esaminando però in generale l' opera della natura nello stabilimento del letto d' un fiume, si osserva

che l' alveo è tanto più incavato ed il fondo tanto più vicino all'orizzontale, condotta dalla foce, quanto è più grande il volume d'acqua ch'ei porta: perciò i letti hanno verso il mare piccolissima quella pendenza che si trova sì considerabile risalendo alla sorgente, e l'alveo dalla sorgente allo sbocco non si dispone già in un piano inclinato uniforme, ma in una curva concava verso l'acqua, o per dir meglio in una serie di piani inclinati contigui le cui pendenze vanno sempre diminuendo verso lo sbocco. Si osserva ancora che ogni fiume tende di sua natura a scorrere stabilmente; e se una cagione estranea alzandone o profondandone il letto, e stringendone o allargandone le rive più del dovere, turbi la sua forza esatta, l'acqua cresce o scema subito di celerità nei luoghi alterati, trasporta o deposita i sassi e l'arena, scava o riempie il fondo, dilata o ristringe le rive, e non cessa, per così dire, dal suo travaglio finchè non abbia rimesso tutto nello stato di prima. Di quì è che gli alvei dei fiumi si alzano continuamente con grave danno delle pianure adjacenti, nel che or la negligenza ed ora l'arte infelice degli uomini sembra congiurar con la natura. Poichè i fiumi deponendo naturalmente allo sbocco tutte le materie che hanno fin là strascinate, continuano tramezzo a queste *alluvioni* il loro corso, e quel fiume che una volta sboccava in I con l'inclinazione DIE, si riduce appoco appoco a sbocc-
41 care in F con l'inclinazione assai minore DFE: ma la forza esatta richiede un inviolabil declivio DIE: dunque l'acqua riempierà con le torbe tutto il vuoto DIFM fino a correr per MF parallela a DI, e l'alveo si rialzerà da DI fino ad MF. Questo disordine è irreparabile se non si giunga ad abbattere l'alluvione IF, o se un maggior corpo d'acque non compensi il minor declivio, due rimedj il più delle volte impraticabili. Ma il permettere che i fiumi corrodano a capriccio il terreno, e con enormi tortuosità si allunghino il corso, il coltivar le montagne la cui terra scommossa scende ben presto a riempire il letto dei fiumi, e costringe l'acqua a strascinare oltre i consueti limiti le grosse materie, questo è un alterar volontariamente l'inalterabil pendenza dell'alveo, e contribuire con grande efficacia al suo pronto rialzamento.

374. L'alveo si divide in sezioni, e la *sezione* è un piano normale al fondo ed alle rive. Sia essa un rettan-

golo BC e suppongasi stabile il letto del fiume (372); 42
o l'acqua che vi scorre è chiara o è torbida: se è chiara, non potendo formarsi nè gorghi nel fondo nè corrosioni negli argini, perchè il letto è stabile, e mancando ogni cagion di ridossi e di ristringimenti, perchè mancano all' acqua le materie da deporre: è manifesto che la sezione si conserverà sempre rettangolare. Ma se l'acqua è torbida, avendo ella tanto men di forza, quanto è più lontana dalla massima corrente o *filone* AE, perchè la sua viscosità e l'attrito delle sponde la rendono sempre più inerte, lascierà cader la torba di quà e di là da AE in H, I e cresceranno le deposizioni in L, M a misura che si troverà più remota dal filone e più vicina alle rive; perciò la primitiva sezione BC si ristringerà, il *pelo* o livello dell' acque dovrà rialzarsi, e quindi aumentandosi o la sua celerità o il suo peso, la forza ne diverrà troppo grande (372), il fondo sarà scavato in K, le rive saranno corrose e dilatate in G, F, e lo scavamento e la corrosione non cesseranno, finchè la forza non sia ridotta alla consueta esattezza. Or poichè l' acque dei fiumi quasi sempre son torbide, è facile intendere, perchè le loro sezioni non son mai rettangolari, ma piuttosto per la natura e del terreno che rare volte può reggersi a picco, e del fiume che deposita e rode, s' inclinano a *scarpa* come LG, MF; e quand' anche le sponde sieno rivestite di muro, pur gli angoli C, D si riempiono e la sezione verso le rive a grado a grado s' incurva e si rialza. Ad onta però di sì strano sfiguramento delle sezioni, se l' Idraulico ne incontra alcune tanto ristrette che quasi tutta l' acqua vi sia in moto, tanto regolari che il pelo alto trovisi presso a poco parallelo al pelo basso, e tanto lontane dalle svolte, dai ringorghi, dalle corrosioni, dalle confluenze, dai corsi considerabili d' acqua dalla riva al filone, e dalle *rotte* o aperture degli argini, che il moto dell' acqua non ne sia sensibilmente alterato: a queste dà il nome di sezioni *libere*, *vive* o *regolari*, e di queste sole fa uso nell' operazioni Idrometriche.

375. Trovata una sezione viva, bisogna misurarla e riquadrarla. Si misura attraversando il fiume con un forte canapo e facendo scorrere lungo di esso il *piede misura* che porti nella sua estremità uno scandaglio o asta

normale di legno: il piede continuamente applicato al canapo, misurerà la larghezza della sezione, e lo scandaglio immerso ad eguali distanze fino al fondo del fiume, ne darà le diverse altezze; onde poi sarà facile di disegnar la sezione in tutte le sue proporzioni, ed applicarvi anche il metodo delle interpolazioni (L. 814) se tanta esattezza possa credersi necessaria. Ciò fatto, la sezione si riguarda o come un poligono irregolare o come una curva, e in ambedue i casi può aversene o l'esatta o l'approssimata quadratura (L. 523 . 946).

376. La *celerità* dell' acqua è varia nei varj punti d' una sezione, come poco fa si è detto (374). Altre volte i filetti fluidi ritardati dalla resistenza del letto, si solean distinguer da quelli che collocati nel filone, non soffrono questo ostacolo: ma non trattandosi in pratica di determinar le celerità d' ogni filetto d' un fiume (se quelle celerità non sieno in diversi punti enormemente diverse, il che nella sezione libera e viva (374) non avrà luogo); ed all' incontro importando unicamente di ridurle ad una *celerità media* da cui può dipendere l' essenzial dottrina sui fiumi: ha prevaluto infine il metodo di considerare in grande il moto dell' acque, e tutti gli Idraulici si sono applicati a fissar questa media celerità, benchè per se medesima ideale ed astratta.

377. Tra le molte macchine immaginate a tale oggetto, è celebre il *Quadrante Idrometrico*. Sull' acqua che corre orizzontalmente per ET si ponga verticale il qua-
43 drante graduato ACB, dal cui centro C penda il filo CH col globo H d' una specifica gravità un poco maggiore di quella dell' acqua; e concepita AG parallela ad ET e tangente in A, è chiaro che la forza dell' acqua trasporterà il globo dalla verticale CA all' obliqua CH e lo sosterrà in un certo angolo o *deviazione* ACH; onde se dal centro H del globo si alzi la verticale HO e si conduca l' orizzontale OL, le forze del peso, dell' acqua e del filo che agiscono insieme sul globo per le direzioni OH, LO, HL, si faranno equilibrio, giacchè il globo riposa, e saranno espresse dalle stesse rette OH, LO, HL (96). Sia dunque q il peso del globo nell' acqua, e la forza di essa si chiami f; fatto il raggio $CA = 1$ e l' angolo $ACH = \theta$, avremo $q : f :: OH : LO :: CA : AF :: 1 : tang\,\theta$ ed $f = q\ tang\ \theta$; e poichè per un' altra situazion del globo

ove fosse F la forza dell' acqua e Θ la deviazione, si troverebbe del pari $F = q \cdot tang\,\Theta$, sarà $F : f :: tang\,\Theta : tang\,\theta$. Ora $F = MC$, $f = mc$ (23) ed M, m esprimono le masse o molecule aquee che in un dato tempo incontrano il globo, e che essendo evidentemente in tanto maggior numero, quanto son più grandi le lor celerità C, c, corrispondono in proporzione alle celerità stesse, e ci danno $M : m :: C : c$ ovvero $M = C$, $m = c$ (11); dunque $F = C^2$, $f = c^2$, e quindi $C^2 : c^2 :: tang\,\Theta : tang\,\theta$, e $C : c :: \sqrt{tang\,\Theta} : \sqrt{tang\,\theta}$, cioè *le celerità dell' acqua sono come le radici delle tangenti di deviazione*.

378. Quindi se per mezzo d' un galleggiante, come d' un globo di cera, che situato or verso le rive ed or nel filone, trascorra un certo spazio in un certo tempo, si esplori l' assoluta celerità C dell' acqua nella sua superficie, e si prenda col Quadrante la deviazione Θ nella superficie medesima, si avrà subito per qualunque altro luogo del fiume l' assoluta celerità $c = \frac{C\sqrt{tang\,\theta}}{\sqrt{tang\,\Theta}}$; onde replicando l' osservazioni a varie altezze dell' acqua e in varj luoghi del fiume, si avrà una serie di diverse celerità, la cui somma totale s divisa per il numero n dell' osservazioni, darà finalmente la cercata celerità media $k = \frac{s}{n}$. Del resto, quanto si è detto d' un' acqua che si muove orizzontalmente, potrebbe applicarsi a qualunque acqua di corso inclinato: ma il Quadrante che in un placido Canale può essere di molto uso, non ne ha quasi alcuno nelle furiose correnti che pur sono le più comuni: la curvatura ed il tremore del filo a cui il globo è sospeso, la difficoltà di conservar l' istrumento immobile e verticale, e la varietà del peso che esige il globo in diversi fiumi e in diversi strati d' un fiume stesso a cagione delle diverse celerità dell' acqua, rendono sì spesso erronee o almen dubbiose l' osservazioni, che appena vi è in oggi Idraulico di qualche merito che se ne fidi.

379. Conosciuta per altro la media celerità k, sarebbe facile di dedurne la portata q d' acqua in un dato tempo; poichè quest' acqua formando un prisma che ha per base la sezione del fiume e per altezza o lunghezza la stessa media celerità, se la sezione sia b, la

portata sarà $q = bk$ (L. 561). Ove si osservi che in generale *nello stato* permanente *o immutabile d' un' acqua in moto, da ineguali sezioni* b, b' *si hanno in egual tempo eguali portate* $q = bk = b'k'$, altrimenti l' acqua o si alzerebbe continuamente o continuamente si abbasserebbe, il che ripugna all' ipotesi dello stato permanente. Per conoscer dunque la portata d' un fiume nel suo stato di permanenza, basta determinarne la media celerità in una sola sezione libera e viva (375). Ed è però vero che un tale stato nei fiumi o rare volte esiste, o è poco durevole: egli dipende dalle stagioni, dalle sorgenti, dagli sbocchi, dagli influenti, da un aggregato insomma di felici combinazioni, che ci obbligano ad avvertire, esser l' Idraulica una Scienza più fisica che matematica, è doversi perciò consultar dal Perito l' esatta storia naturale del fiume sopra cui vuole operare.

380. Finalmente gli *ostacoli* che incontra l' acqua, sono l' asprezze degli alvei per cui si muove: urta ella in queste asprezze e perde nell' urto una porzione della sua celerità. Ma la general dottrina sull' urto dei fluidi meritando di esser trattata a parte, comincieremo da questa la teoria dei fluidi in moto, e frattanto osserveremo 1°. che o si supponga un fluido mobile che incontri un ostacolo in riposo, o un fluido stagnante che nelle circostanze medesime sia incontrato da un ostacolo in movimento, il raziocinio per ambedue i casi o è manifestamente lo stesso, o, secondo gl' Idraulici più scrupolosi, la differenza è sì leggiera, da potersi in pratica trascurar senza rischio: 2°. che se il fluido m si muova con una celerità χ e il solido M lo sfugga o lo incontri con una celerità k, l' effetto dell' urto sarà relativo nel primo caso alla differenza, nel secondo alla somma delle celerità, e potrà concepirsi che M riposi, e che il fluido m abbia o la celerità $\chi - k$ se M lo sfugge, o $\chi + k$ se l' incontra: 3°. che per fissare in qualche modo le leggi dell' urto, convien supporre che le molecule fluide urtando il solido, non s' impediscan tra loro; or questa ipotesi non ben conforme al vero, rende incerta e bisognevole di correzioni la teorìa, come vedremo.

Urto dei Fluidi in moto .

Già si avvertì (380) che o si muova un fluido contro un solido in quiete, o un solido contro un fluido tranquillo, il risultato è praticamente lo stesso : non si dovrà dunque stupire se considereremo il moto talor nell' una e talor nell' altra classe di corpi .

381. Sia il corpo M che col suo piano AD e con la celerità c investa direttamente lo stagnante strato fluido 44
CN d' una grossezza infinitesima g . Fatto $c = o$ nella formula generale dell' urto (209), e posto c in luogo di C , abbiamo il moto perduto dal solido M o la resistenza opposta dal fluido , $R = \frac{nmMc}{M + m}$, ovvero poichè la massa m del fluido è infinitesima , $R = \frac{nmMc}{M} = nmc = n\gamma vc$ (9 . 305) , cioè per esser v la solidità geometrica (9) o il prodotto dell' area $AD = a$ nella grossezza g dello strato (L. 561) , $R = nac\gamma g$. Ora se il corpo M penetri il fluido per un tratto o spazio infinitesimo $CB = ds$, il numero delle resistenze R eguaglierà il numero b degli strati che sono in CE , e per la resistenza totale r si avrà $r = b \cdot nac\gamma g$: ma il numero b degli strati eguaglia il numero dei globetti fluidi che entrano in CB , e che hanno per diametro la grossezza g dello strato; dunque (L. 36) $b = \frac{CB}{g} = \frac{ds}{g} = \frac{cdt}{g}$ (32) , onde infine $r = nac^2\gamma dt$, espressione della resistenza che nel tempo dt infinitesimo soffre in un fluido, della gravità specifica γ, un corpo solido in movimento , che urta direttamente il fluido col piano a e con la celerità c .

382. Dunque 1°. la resistenza r' sofferta da un altro corpo in un altro fluido con le medesime circostanze, sarà $r' = n'a'c'^2\gamma' dt$, onde $r : r' :: nac^2\gamma : n'a'c'^2\gamma'$, analogia da cui nei varj casi di $n = n'$, $c = c'$, $\gamma = \gamma'$ ec., potranno dedursi moltissimi teoremi e specialmente quelli sì celebri : 1°. che *le resistenze opposte da un fluido al mobile sono come i quadrati delle celerità del mobile* : 2°. che *le resistenze opposte da un fluido a varj piani che*

con eguał celerità lo incontrano, son proporzionali ai piani stessi.

383. Dunque 2°. se riposando il solido, si muova il fluido con la celerità media χ, la forza f comunicata dal fluido al solido sarà $f = na\chi^2\gamma dt$; e se movendosi il fluido con la celerità χ, il solido lo sfugga o lo incontri con la celerità $\pm k$, si avrà per ambedue i casi (380) $f = na\gamma(\chi \mp k)^2 dt$.

384. Per altro la formula $r = nac^2\gamma dt$ suppone che il piano a si presenti al fluido direttamente: cerchiamo pertanto la resistenza diretta r' per un piano obliquo a', e supponghiamo che i fluidi X, Y delle gravità specifi-
45 che γ, γ' sieno urtati dai piani AB $= a$ direttamente e KD $= a'$ obliquamente nell' angolo d' incidenza EKD $= \phi$, quello con la celerità c, questo con la celerità $c' =$ IG nella direzione de' filetti fluidi KE. Risoluta IG nelle due GH, HI, l'una parallela e l'altra normale a DK, delle quali la sola IH produce l' urto diretto, sarà $r : r' :: na\gamma c^2 : n'a'\gamma' . \text{IH}^2$ (382): ma condotta sul filetto fluido KE la normale DE, i triangoli rettangoli simili KDE, GIH danno $\text{IH} = \frac{\text{ED} . \text{IG}}{\text{KD}} = \frac{c' . \text{ED}}{\text{KD}}$, ed $\text{ED} = \frac{\text{KD}\, sen\, \phi}{\text{R}}$ (L. 644); dunque $r : r' :: nac^2\gamma : \frac{n'a'c'^2\gamma'\, sen^2\phi}{\text{R}^2}$.
Per un altro piano diversamente obliquo in un diverso fluido, si avrebbe dunque $r : r'' :: nac^2\gamma : \frac{n''a''c''^2\gamma'\, sen^2\phi'}{\text{R}^2}$, onde per due piani obliqui qualunque $r' : r'' :: n'a'c'^2\gamma' \times sen^2\phi : n''a''c''^2\gamma'' sen^2\phi'$.

385. Dunque se i fluidi sieno della medesima specie e perciò $n = n'$, $\gamma = \gamma'$, si avrà $r : r' :: ac^2 : \frac{a'c'^2\, sen^2\phi}{\text{R}^2}$. Se di più i piani urtino o sieno urtati dai fluidi con una stessa celerità e però anche $c = c'$, verrà $r : r' :: a : \frac{a'\, sen^2\phi}{\text{R}^2}$. Se inoltre i piani sieno eguali o lo stesso piano si esponga al fluido prima direttamente e poi obliquamente,

te, si avrà $a = a'$ ed $r : r' :: 1 : \frac{sen^2 \phi}{R^2} :: R^2 : sen^2 \phi$. Infine se in vece del piano AB si prenda il piano ED in modo che i due piani ED, KD incontrino l' uno direttamente e l' altro obliquamente un egual numero di filetti fluidi, posta l la larghezza di ambedue, sarà $a' = KD . l$, $a = ED . l = \frac{KD . l . sen \phi}{R}$, ed $r : r' :: \frac{KD . l . sen \phi}{R} : \frac{KD . l . sen^2 \phi}{R^2} :: R : sen \phi$. 45

386. Quest' ultimo è il caso d' una sfera ovvero (poichè l' urto contro una sfera si riduce al solo urto contro l' emisfero) d' un emisfero DAB urtante o urtato dal fluido MM. Supponghasi nato l' emisfero dalla rivoluzion del quadrante CAB intorno al semiasse $CA = b = CP$ (L. 546) e si prendano l' ascissa $CG = x$ e l' ordinate infinitamente vicine $GP = y$ e gp: è chiaro che le due zone FH, LN generate l' una obliquamente al fluido dall' archetto Pp, l' altra normalmente dalla lineetta $Gg = dx$, urteranno con forze infinitesime dr', dr un egual numero di filetti fluidi, onde $dr : dr' :: R : sen\ GPp$ (385) $:: CP : PG$ (L. 418) $:: b : y$, e $dr' = \frac{ydr}{b}$: ma dr è misurata dal piano o zona normale LN (382), ed $LN = 2\pi x dx$, differenziale del contiguo circolo $OIG = \pi x^2$ (L. 520); dunque $dr' = \frac{2\pi y x dx}{b} = \frac{2\pi x dx \sqrt{(b^2 - x^2)}}{b}$ (L. 479), il cui integrale darà l' urto o resistenza della superficie FAP generata dall' arco indefinito AP, cioè $r' = \frac{-2\pi (b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ $+ Cost.$ (L. 857); e poichè l' urto manca al mancar dell' arco AP, nel qual caso si ha $CG = x = 0$, sarà $0 = \frac{-2\pi b^3}{3b} + Cost.$ e $Cost. = \frac{2\pi b^2}{3}$; onde l' integrale completo $r' = \frac{2\pi b^2}{3} - \frac{2\pi (b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$; ove posto $x = b$, viene l' urto 46

46 $r' = \frac{2\pi b^3}{3}$ contro l' intero emisfero, eguale all' urto diretto contro i due terzi del circolo massimo πb^2 dell' emisfero medesimo (382).

387. Quest' urto però è normale a Pp (384) o nella direzione di PC; quindi volendolo nella direzione del fluido stesso o di PG, quale ordinariamente si considera dagli Idraulici, converrà far $PS = \frac{2\pi yxdx}{b}$ forza o resistenza prodotta dalla zona Pp (386), e risolverla nelle due forze normali PT, TS, delle quali la TS non concorre affatto al moto per PG ed è anche distrutta da una forza eguale ed opposta nell' altro quadrante ADC. Or poichè i triangoli simili PCG, PST danno PC (b) : PG (y) : : PS ($\frac{2\pi yxdx}{b}$) : PT, l' urto o resistenza della zona Pp nella direzione di PG, sarà espresso da $PT = dr'' = \frac{2\pi y^2 xdx}{b^2}$ $= 2\pi xdx - \frac{2\pi x^3 dx}{b^2}$, il cui integrale $r'' = \pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right)$ $+ Cost.$ (L. 855) darà l' urto contro il segmento FAP. Ora giacchè posta la resistenza $r'' = 0$, svanisce la sfera e si ha $x = 0$, onde $Cost. = 0$, se nell' integrale completo $\pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right)$ si faccia $x = b$, l' arco AP diverrà AB e la quantità $\frac{\pi b^2}{2}$ esprimerà l' urto cercato, che è perciò eguale all' urto diretto contro la metà del circolo massimo della sfera (382). Questa quantità $\frac{\pi b^2}{2}$ potrebbe chiamarsi *piano di riduzione*, perchè il fluido urtando direttamente in esso v' incontrerebbe la resistenza medesima che incontra urtando nell' emisfero.

388. Ma poichè il fondamento del metodo esposto soffre delle gravi eccezioni (380), cercheremo l' urto d' un globo con un' immediata esperienza. Supposto b il suo raggio, p il suo peso fuor dell' acqua, e q il suo peso nell' acqua, si attacchi il globo al Quadrante idrometrico (377), ed in un' acqua di corso placido ed oriz-

zontale (378) si esplori l' angolo o deviazione θ, da cui si ricaverà che il globo riceve dall' acqua una forza $f = q \tan \theta$ (377). Ora la forza dell' acqua contro il circolo massimo πb^2 del globo, è $F = \pi b^2 . \frac{c^2}{2g} . r$ (369) e $r = \frac{P}{V}$, $P = p - q$ (325), $V = \frac{4b^3\pi}{3}$ (L. 566), onde $r = \frac{3(p-q)}{4\pi b^3}$; dunque $F = \frac{3c^2(p-q)}{8bg}$. Posta pertanto $\frac{x}{1}$ la ragione delle forze dell' acqua contro il globo e contro il suo circolo massimo, si avrà $x : 1 :: f : F :: q \tan \theta : \frac{3c^2(p-q)}{8bg}$, onde infine $x = \frac{8bg\, q \tan \theta}{3c^2(p-q)}$, ove c è la celerità dell' acqua che facilmente si può conoscere col galleggiante (378). Così, poichè con un' esperienza accuratissima si trovò in misure e pesi di Svezia $2b = 0, 17$, $c = 2, 086$, $g = 32$, $p = 2397$, $q = 987$, $\theta = 22°, 22', 48''$, sarà $Lx = L4 + L2b + Lg + Lq + L \tan \theta - L3 - 2Lc - L(p-q) = 9, 6816534 = L0, 48046$, onde $x = 0, 48046 = \frac{1}{2}$ prossimamente, dimodochè l' esperienza e la teorìa (387) si accordano in questo punto assai bene.

389. Stabilite queste nozioni, potrà facilmente determinarsi il moto orizzontale e verticale dei solidi in mezzo ai fluidi, o di questi in mezzo a quelli. Sia C la celerità iniziale del solido orizzontalmente mosso nel fluido, e poichè la resistenza $r = nac^2ydt$ (381) è una forza che ad ogni istante dt ritarda il moto del solido, sarà $r = Fdt = -pdc$ (34) prendendo il peso p del solido in luogo della massa M a cui è proporzionale (9), e si avrà $-pdc = nac^2ydt$, ovvero $\frac{naydt}{p} = -\frac{dc}{c^2}$, onde integrando (L. 855), $\frac{nayt}{p} = \frac{1}{c} + Cost.$; ma nel principio del moto si ha $t = 0$ e $c = C$; dunque $0 = \frac{1}{C} + Cost.$ e $Cost. = \frac{-1}{C}$; perciò l' integrale completo è $\frac{nayt}{p}$

$= \frac{1}{c} - \frac{1}{C}$, e $c = \frac{Cp}{naC\gamma t + p}$.

Di nuovo, poichè $dt = \frac{ds}{c}$ (35), sostituito questo valore nell' equazione $nac^2\gamma dt = -pdc$, verrà $\frac{na\gamma ds}{p} = -\frac{dc}{c}$, ed integrando (L. 856), $\frac{na\gamma s}{p} = -Lc + Cost.$ ma nel principio del moto lo spazio $s = 0$ e $c = C$; dunque $Cost. = LC$, e l' integrale completo sarà $\frac{na\gamma s}{p} = LC - Lc = L\frac{C}{c}$, e sostituito il valor di c trovato di sopra, $s = \frac{p}{na\gamma} L\left(\frac{naC\gamma t}{p} + 1\right)$.

Dunque richiamando quì il noto numero e, il cui logaritmo iperbolico $= 1$, sarà $L\left(\frac{naC\gamma t}{p} + 1\right) = \frac{na\gamma s}{p} = \frac{na\gamma s}{p} Le = Le^{\frac{na\gamma s}{p}}$, e perciò $t = \frac{p}{naC\gamma}\left(e^{\frac{na\gamma s}{p}} - 1\right)$.

390. Quanto al moto verticale all' ingiù, chiamate γ, Γ, P, p le gravità specifiche e i pesi del fluido scacciato e del solido immerso, si avrà $P = \frac{\gamma p}{\Gamma}$ (325), e il peso residuo del solido immerso sarà $q = p - \frac{\gamma p}{\Gamma}$ (326): ma nel tempo di 1″ e nel vuoto si ha la forza di gravità $F = \varphi M$ (40) $= gM$ (44) $= gp$ (389); dunque nel tempo dt e nel fluido, sarà $F = gqdt = gdt\left(p - \frac{\gamma p}{\Gamma}\right) = gpdt\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$, e fatto $g\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right) = h$, avremo $F = hpdt$. Ora le due forze F, r che urtano il solido, essendo insomma due contrarie resistenze e stando perciò tra loro come i quadrati delle celerità del solido (382), chiamata k la celerità relativa alla forza o resistenza $F = hpdt$, avremo $hpdt : nac^2\gamma dt :: k^2 : c^2$, e però k^2

$= \frac{hp}{na\gamma}$, ed $nac^2\gamma dt = \frac{hc\,pds}{k^2} = r$; dunque poichè r si oppone al F, la forza residua acceleratrice con cui scende il solido, sarà finalmente $F - r = pdc$ (34), cioè $hdt = \frac{k^2dc}{k^2 - c^2}$, ed integrando (L. 907), $ht = \frac{k}{2} L \frac{k+c}{k-c} + Cost.$: ma nel principio del moto $t = 0$, $c = 0$; dunque $Cost. = 0$ e quindi $t = \frac{k}{2h} L \frac{k+c}{k-c}$.

Di nuovo, giacchè $hdt = \frac{k^2dc}{k^2 - c^2}$, e $dt = \frac{ds}{c}$ (35); verrà $hds = \frac{k^2cdc}{k^2 - c^2}$, ed integrando (L. 856), $2hs = k^2.(Cost. - L(k^2 - c^2))$; ma nel principio del moto $s = 0$, $c = 0$; dunque $0 = k^2 (Cost. - Lk^2)$ e $Cost. = Lk^2$, onde l' integrale completo sarà $2hs = k^2 L \frac{k^2}{k^2 - c^2}$, e quindi $s = \frac{k^2}{2h} L \frac{k^2}{k^2 - c^2}$.

391. Dunque $L \frac{k^2}{k^2 - c^2} = \frac{2hs}{k^2} = \frac{2hsLe}{k^2} = Le^{\frac{2hs}{k^2}}$, e perciò $\frac{k^2}{k^2 - c^2} = e^{\frac{2hs}{k^2}}$, onde $c = k\sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2hs}{k^2}}}\right)}$, valore che sostituito nell' equazione $t = \frac{k}{2h} L \frac{k+c}{k-c}$ (390), dà $t = \frac{k}{2h} L \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$. E se vogliasi dato per t lo spazio s, sarà $\frac{2ht}{k} = \frac{2htLe}{k} = Le^{\frac{2ht}{k}} = L \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$, e

perciò $e^{\frac{2ht}{k}} = \frac{1+\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$, ovvero togliendo il denominatore e trasponendo, $e^{\frac{2ht}{k}} - 1 = (e^{\frac{2ht}{k}} + 1) \times \sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}$, cioè $\frac{e^{\frac{2ht}{k}}-1}{e^{\frac{2ht}{k}}+1} = \sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}$, e quadrando, $\frac{(e^{\frac{2ht}{k}}-1)^2}{(e^{\frac{2ht}{k}}+1)^2} = 1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}}$; dunque trasponendo i termini e riducendo al medesimo denominatore, $e^{\frac{-2hs}{k^2}} = \frac{4e^{\frac{2ht}{k}}}{(e^{\frac{2ht}{k}}+1)^2}$, ed estraendo la radice quadra, $\frac{1}{e^{\frac{hs}{k^2}}} = \frac{2e^{\frac{ht}{k}}}{e^{\frac{2ht}{k}}+1}$, onde $e^{\frac{hs}{k^2}} = \frac{e^{\frac{2ht}{k}}+1}{2e^{\frac{ht}{k}}} = \frac{e^{\frac{ht}{k}}+e^{\frac{-ht}{k}}}{2}$; dunque restituendo i logaritmi, $\frac{hs}{k^2} \mathrm{L}e = \mathrm{L}\frac{e^{\frac{ht}{k}}+e^{\frac{-ht}{k}}}{2}$: e se si osservi che quando il tempo t è solamente di pochi secondi, il nnmero $e^{\frac{ht}{k}}$ diviene assai considerabile e perciò $e^{\frac{-ht}{k}}$ piccolissimo e assolutamente negligibile, si avrà infine lo

spazio $s = \frac{k^2}{h} L \frac{e^{\frac{ht}{k}}}{2} = \frac{k^2}{h}(\frac{ht}{k} Le - L2) = kt - \frac{k^2}{h}(0,6931472)$ (L. 304), ove $\frac{k^2}{h} = \frac{p}{nay}(390) = \frac{rV}{nay}$.

392. Non ci fermeremo sul moto verticale del solido lanciato all' insù con la celerità iniziale C; forse è troppo quello stesso che abbiamo detto finora: solo osserveremo che le due forze F, r concorrendo ora a distruggere il movimento del solido, la forza totale ritardatrice sarà $F + r = - pdc$ (34) cioè $hdt = \frac{-k^2 dc}{k^2 + c^2}$ (390), formula da cui con l' ordine tenuto di sopra e coi noti metodi d' integrazione (L. 909) si avrà c, s e t.

393. Tali son le leggi del moto dei corpi solidi tra i fluidi o dei fluidi tra i solidi: ma per le cagioni altrove indicate (380), le sole conseguenze primarie (382) si trovano sufficientemente d' accordo con l' esperienza, e perciò sono ormai passate in legge presso gli Idraulici. Quanto alla proporzione delle resistenze nei piani obliqui (384), ella se ne discosta enormemente e sarebbe pericoloso il valersene: la misura stessa del piano di riduzione che col suo soccorso stabilimmo già per la sfera (387), potrebbe stimarsi erronea se non ce ne fossimo in altro modo assicurati (388). Per altro questa diversità tra gli sperimenti e la teoria si può correggere in gran parte sol che si assegni un adattato valore al numero n che quantunque determinabile nell' urto dei solidi (209), si è quì lasciato apposta indeterminato per applicare alle formule col mezzo di esso, la correzione opprtuna. L' osservazioni esattissime di Newton e d' altri Fisici rinomati esigono in somma che non si faccia più o $n = 1$ o $n = 2$, sicchè n non esca dai limiti 1, 2, ma che qualunque sia il grado di elasticità nei fluidi, si ponga sempre $n = \frac{1}{2}$: allora nel moto dei piani diretti e della sfera stessa, il consenso della teorìa e dell' esperienza divien quasi maraviglioso. Eccone un esempio.

Cadde da una certa altezza in 8'', a un globo di un raggio b = pie. 0,195555, la cui vera gravità specifica stava a quella dell' aria come 580 a 23,774: si cerca

quest' altezza. Sia ella s, e si avrà (391) $Ls = L\,(kt - \frac{k^2}{h} \times 0,6931472)$ e $\frac{k^2}{h} = \frac{\Gamma V}{n a \gamma}$: ma $\Gamma = 580$, $\gamma = 23,774$, $b = 0,195555$, il volume del globo $V = \frac{4\pi b^3}{3}$, il suo circolo massimo πb^2, il suo piano di riduzione $a = \frac{\pi b^2}{2}$ (387), $n = \frac{1}{2}$; dunque $\frac{k^2}{h} = \frac{580 \cdot \frac{4\pi b^3}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 23,774 \cdot \frac{\pi b^2}{2}} = \frac{16 \; 580 \cdot 0,065185}{23,774}$, e fatto il calcolo coi logaritmi, si troverà $L\frac{k^2}{h} = 1,4055934$: ma $h = g\,(1 - \frac{\gamma}{\Gamma})$ (390) e per Londra, ove fu fatta l' esperienza, $g = 30,196$; dunque $h = \frac{30,196 \cdot 556,226}{580}$, cioè $Lh = 1,4617727$; onde $L\frac{k^2}{h} + Lh = Lk^2 = 2,8673661$ e $Lk = \frac{Lk^2}{2} = 1,4336830$: ma $Lt = 0,9138138$; dunque $Lkt = Lk + Lt = 2,3474968 = L\,222,58$. Ora $L\frac{k^2}{h} = 1,4055934$ e $L\,0,6931472 = 9,8408255$, onde $L\frac{k^2}{h} \times 0,69$ ec. $= 1,2464189 = L\,17,64$; dunque $Ls = L\,(222,58 - 17,64)$, ed $s =$ *pie.* 205. Newton misurò quest' altezza e con tenue divario la trovò di *pie.* 206.

Moto dell' acqua nei Condotti.

394. Nella conserva BA si apra un piccolo lume oriz-
40 zontale o verticale G armato o disarmato (366), e sia b la sua area, $GA = p$ l' altezza costante dell' acqua nella conserva, t un tempo dato, e Q la quantità dell' acqua che esce per G in questo tempo. Essendo costante l' altezza dell' acqua, sarà uniforme il suo moto (367), e la lunghezza della colonna aquea o lo spazio che l' acqua trascorrerebbe, sarà $l = s = ct$ (27): ma $p = \frac{c^2}{2g}$ (369), onde

$c = \sqrt{2gp}$;

$t = \sqrt{2gp}$; dunque $s = t\sqrt{2gp}$, e la quantità dell' ac- FIG. 4

qua $Q = \frac{mbs}{n}$ (366) $= \frac{mbt\sqrt{2gp}}{n}$: ma $g =$ *pie.* 30,2 (68) $=$ *poll.* 362; dunque $Q = \frac{269mbt\sqrt{p}}{10n}$ *poll. cub.* Ora poichè attesa qualche viscosità delle molecule aquee, si trova per esperienza che la quantità dell' acqua per ogni 100 *poll. cub.* dee diminuirsi di $\frac{5}{8}$ di *poll.* in circa, sarà $Q = \frac{269mbt\sqrt{p}}{10n} - \frac{269mbt\sqrt{p}}{1600n} = \frac{42771mbt\sqrt{p}}{1600n}$ *poll. cub.*; onde 1°. se $m = 5$, $n = 8$ (366), avremo $Q = \frac{42771bt\sqrt{p}}{2560}$, e poichè $\frac{42771}{2560} = \frac{267}{16}$ incirca, sarà l' equazione I^a. $Q = \frac{267bt\sqrt{p}}{16}$ *poll. cub.*

395. 2°. Se $m = 13$, $n = 16$ (366), avremo $Q = \frac{556023bt\sqrt{p}}{25600}$, e poichè $\frac{556023}{25600} = \frac{695}{32}$ prossimamente, sarà l' equazione II^a. $Q = \frac{695bt\sqrt{p}}{32}$ *poll. cub.*: e in ambedue l' equazioni t deve essere espresso in secondi, come lo è il tempo nel moto uniforme (13), b in pollici quadri, e p in pollici lineari, come in pollici si è espresso g. Date pertanto tre delle quattro quantità b, p, Q, t, si avrà sempre la quarta: così se nella I^a. equazione sia b un' area circolare del raggio $r =$ *lin.* $8 =$ *poll.* $\frac{2}{3}$, onde $b = r^2\pi = \frac{4}{9} \times 3,142$ (L. 520) $= 1,396$, $p =$ *pie.* 11 *poll.* $6 =$ *poll.* 138, onde $\sqrt{p} = 11,7$ e $t = 8' = 480''$, si troverà che per questo lume esce nel dato tempo una quantità d' acqua $Q = 130828$ *poll. cub.*

396. Uniscasi ora al lume G un Condotto inclinato GM di poche tese per formare un *getto d' acqua* MV obliquo o verticale, e determiniamo il diametro di GM, onde si ottenga il massimo getto possibile. Sia $b = r^2\pi$ la sezione del condotto GM, $\beta = r'^2\pi$ l' area del getto M, e le

40 loro portate Q, Q′ saranno $\frac{mbl}{n}$, $\frac{m\beta\lambda}{n}$ (366), onde Q : Q′ : : $bl : \beta\lambda :: r^2 l : r'^2 \lambda$. Ora la conserva AB si suppone costantemente piena o in uno stato permanente; dunque (379) Q $= Q'$, $r^2 l = r'^2 \lambda$, e però $r^2 : r'^2 :: \lambda : l :: c' : c$ (367): ma l'altezza dell'acqua nella conserva è MN $= p$ (371), e quindi $c' = \sqrt{p}$ (367); dunque $r^2 : r'^2 :: \sqrt{p} : c$, onde $c = \frac{r'^2 \sqrt{p}}{r^2}$, e per un altro getto si avrebbe del pari $C = \frac{R'^2 \sqrt{P}}{R^2}$. Supposto pertanto che questo secondo getto si sia trovato per esperienza il più vantaggioso di quanti possono aversene con una medesima altezza P e con uno stesso raggio R, affinchè l'altro getto abbia un egual vantaggio, dovrà farsi in modo che la celerità c nell' un Condotto eguagli la celerità C dell' altro; dal che si avrà $\frac{r'^2 \sqrt{p}}{r^2} = \frac{R'^2 \sqrt{P}}{R^2}$, ovvero $r = \frac{Rr'}{R'} \sqrt[4]{\frac{p}{P}}$: ma fatto P $=$ *lin.* 467, ed R $=$ *lin.* 6, l'esperienze di Bossut danno R′ $=$ *lin.* $1\frac{7}{8}$; dunque poichè $\sqrt[4]{467} = 4,65$ incirca, sarà $r = \frac{64 r' \sqrt[4]{p}}{93}$, e date o prese ad arbitrio due delle tre quantità p, r, r', si conoscerà subito l'altra: così se $p =$ *lin.* 7488, $r' =$ *lin.* 3, verrà $r =$ *lin.* 19 incirca.

397. Ma qual'è poi l'altezza d'un getto verticale? La teoria che prescinde da ogni ostacolo, farebbe salire il getto fino all'altezza dell'acqua nella conserva (93): ma l'attrito, la resistenza dell'aria e lo scambievole incontro delle molecule aquee, diminuiscono talmente questa salita, che secondo gli esperimenti combinati di Mariotte e di Bossut, le differenze tra l'altezza delle conserve e dei getti sono come i quadrati dell'altezze dei getti. Quindi poste p, p', l'altezze dell'acqua in due conserve, ed a, a' l'altezze dei getti, si avrà $p - a : p' - a' :: a^2 : a'^2$, onde $\frac{a^2}{p-a} = \frac{a'^2}{p'-a'}$; e poichè si è trovato che per un getto di *pie.* 5 è necessaria un' altezza d' acqua di

pie. 5 *poll.* 1, sarà $p' =$ *poll.* 61, $a' =$ *poll.* 60, ed $\frac{a^2}{p-a} = 3600$; dal che si ottiene $a = -1800 + 60\sqrt{(p + 900)}$ *poll.*, se p sia dato in pollici, e $p = a + \frac{a^2}{3600}$, ovvero data a in piedi e riducendo a^2 in pollici, $p =$ *pie.* $a +$ *poll.* $\frac{144a^2}{3600} =$ *pie.* $a +$ *poll.* $\frac{(2a)^2}{100}$. Così se $a = 44$, sarà $p =$ *pie.* 44 + *poll.* 77,44 = *pie.* 50 + *poll.* 5,44; e se $p =$ *poll.* 605,44, verrà $a = -1800 + 60.38,8 =$ *poll.* 528 = *pie.* 44.

398. Vale tuttociò finchè la lunghezza dei Condotti è molto piccola; se ella divenga considerabile con più sinuosità orizzontali e verticali, come ordinariamente succede, si manifesterà talmente l' attrito, che posta l' altezza p dell' acqua nella conserva tra i 3 e i 5 piedi, la lunghezza l del Condotto tra le 300 e le 500 tese, e la portata Q senza attrito tra i 30000 e i 50000 pollici cubici, l' esperienza ha fatta trovar la portata con l' attrito presso a poco $Q' = \frac{Ql}{230400}$, onde la formula $Q = \frac{695bt\sqrt{p}}{32}$ (395) da cui si avrebbe $b = \frac{32Q}{695t\sqrt{p}}$, si cangia ora in $Q' = \frac{695blt\sqrt{p}}{7372800} = \frac{139blt\sqrt{p}}{1474560}$. Immaginando pertanto divisa in due parti l' altezza dell' acqua nella conserva, l' una per vincer l' attrito e l' altra per dare da un lume $b \left(= \frac{32Q}{695t\sqrt{p}}\right)$, e per un Condotto senza attrito la portata $Q' = \frac{139blt\sqrt{p}}{1474560}$, si dica: se con una certa altezza d' acqua in un Condotto senza attrito la portata Q' esige un lume b, qual lume b' esigerà la portata Q? cioè $\frac{Ql}{230400} : \frac{32Q}{695t\sqrt{p}} :: \frac{695bt\sqrt{p}}{32} : b' = \frac{230400b}{l}$, la quale, espresso b in pollici quadri, ed l in lineari, sarà la misura in pollici quadri del lume necessario alla portata Q. Così se $Q = 40000$ *poll. cub.*,

$t = 1' = 60''$, $p = pie.\ 4 = poll.\ 48$, onde $\sqrt{p} = 6,9$, $b = \frac{32Q}{695t\sqrt{p}} = \frac{32 \cdot 400}{139 \cdot 3 \cdot 6,9}$, ed $l = tes.\ 400 = poll.\ 28800$, si avrà $b' = \frac{230400 \cdot 32 \cdot 400}{139 \cdot 3 \cdot 6,9 \cdot 28800} = \frac{256 \cdot 400}{139 \cdot 3 \cdot 6,9} = 35,588$: onde se il lume sia circolare o $b' = \pi r^2$, avremo $r^2 = \frac{35,588}{3,142} = 11,3$ ed $r = poll.\ 3,36$ in circa. Non si è potuta ottener finora dall' esperienza una formula di Q' più generale di questa, e solo si sa che o cresca la lunghezza del Condotto o scemi l' altezza dell' acqua nella conserva, l' attrito aumenta, e Q' impiccolisce.

399. Vi è per altro un metodo elegante per calcolar la portata Q' d' un dato Condotto, qualunque ne possa esser l' attrito. Giacchè questo ostacolo riduce Q a Q', l' effetto dell' attrito equivarrà ad un ristringimento del lume o al cangiamento di $b\ (= r^2\pi)$ in $\beta\ (= r'^2\pi)$; dunque la celerità dell' acqua nel Condotto sarà (396) $c = \frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2}$: e siccome la celerità $c'\ (= \sqrt{p})$ nasce dall' altezza $(\sqrt{p})^2 = p$ (396), così la celerità $c\ (= \frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2})$ nascerà dall' altezza $(\frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2})^2 = \frac{r'^4 p}{r^4}$: ma $r > r'$, e però $p > \frac{r'^4 p}{r^4}$; dunque l' acqua che ha una forza o celerità corrispondente all' altezza p (367), e sgorga intanto con una forza o celerità corrispondente all' altezza $\frac{r'^4 p}{r^4}$, impiegherà necessariamente la forza restante $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$ contro le pareti del Condotto. Perciò se normalmente alla direzion del moto dell' acqua si apra in queste pareti un piccol foro b', l' acqua si alzerà per esso fino all' altezza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$. Si osservi pertanto la portata q' del piccolo foro in $1'$, si calcoli ancora la portata q che si avrebbe dal foro medesimo in $1'$ se il Condotto fosse chiuso, e l' acqua avesse l' altezza costante p (395); e poichè (368) $q : q' ::$

$\sqrt{p} : \sqrt{\left(p - \frac{r'^4 p}{r^4}\right)} :: 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{r'^4}{r^4}\right)}$, sarà $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{\sqrt{(q^2 - q'^2)}}{q}$: ma $Q : Q' :: b : \beta$ (368) $:: r^2\pi : r'^2\pi :: r^2 : r'^2$, e $Q = \frac{10425 b\sqrt{p}}{8}$, fatto $t = 1' = 60''$ (395); dunque $Q' = \frac{r'^2 Q}{r^2} = \frac{10425 b\sqrt{(q^2 - q'^2)p}}{8q}$. Così se in un Condotto cilindrico sia $r = 1$, onde $b = r^2\pi = 3,142$, $b' = \frac{1}{16} . 3,142 = 0,196$, $p = pie.\ 3 = poll.\ 36$, onde $\sqrt{p} = 6$, e $t = 1' = 60''$, sarà $q = \frac{267 b' t\sqrt{p}}{16}$ (394) $= 1177$; e se con l'esperienza immediata si trovi per esempio $q' = 1000$, avremo $\frac{r'^2}{r^2} = 0,5274$, onde poichè $Q = 24566$, verrà finalmente $Q' = 12956$ *poll. cub.*

400. La forza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$ con cui l'acqua preme le pareti dei Condotti (399), serve a fissarne la necessaria grossezza, allorchè dovendo formare un getto, son quasi interamente chiusi nella loro estremità. Infatti è chiaro che o il fluido sia in quiete nel Condotto ad un' altezza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$ o vi si muova con una pressione $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$, l'effetto sarà lo stesso e vi vorrà un' egual grossezza per resistere all' uno e all' altro sforzo; dunque la grossezza occorrente in questo secondo caso, sarà $g' = \frac{b'\gamma' g t p (r^4 - r'^4)}{ab\gamma r^4 t'}$ (317), ove r, r' sono i raggi del Condotto e del getto.

401. Non è raro che a dispetto di tutti i calcoli e misure opportune, l'effetto dei Condotti non ben corrisponda all' espettativa, e si abbia o una portata troppo piccola, in modo che una porzione d'acqua non sia ricevuta dal Condotto e si versi per lo sfogo del recipiente, o una portata troppo grande, in modo che l'acqua della sorgente non basti a somministrare allo sbocco una continuata ed uniforme quantità d'acqua. Si rimedia allora al primo

inconveniente col dare al principio del Condotto per tre o quattro tese la forma di una tromba la cui parte più larga imbocchi nella conserva; poichè scemando in tal guisa e gli attriti e la contrazion della vena, si aumenterà per l' opposto la celerità e la portata dell' acqua. Il secondo inconveniente si toglie col ristringere a grado a grado le tre o quattro ultime tese del Condotto, onde si diminuisca il diametro dello sbocco; poichè crescendo col ristringimento gli ostacoli, scemerà necessariamente la celerità dell' acqua, e se ne avrà l' efflusso senza intermittenza. Del resto, potendosi veder nei Pratici il metodo dettagliato per la costruzione e collocazione dei Condotti, ci contenteremo di accennar quì alcuni dei più essenziali precetti: 1°. avanti di tutto bisogna assicurarsi della possibilità di condur l' acqua da un luogo all'altro, riconoscendo con un' esatta livellazione quanto la sorgente sia più alta dello sbocco, e se possa darsi al Condotto una pendenza almeno di $\frac{2}{3}$ di linea per tesa: 2°. sarà sempre ben fatto di contare sopra un' altezza d' acqua un poco minore di quella che si hà realmente; poichè se il diametro dei Condotti, quale è fissato dal calcolo, riuscisse in pratica alquanto grande, l' acqua si abbasserebbe nella conserva, e avendo riserbata una certa altezza, questo difetto sarebbe tolto da essa senza bisogno d'altri compensi: 3°. nel fissare i luoghi per cui dee passare un Condotto e le tortuosità che dee fare, convien ricordarsi che secondo l' esperienze di Bossut, le piegature orizzontali e più ancora le verticali diminuiscono le portate, e che l'unire ad angoli acuti o retti i varj pezzi del Condotto, è un esporlo al pericolo d' aprirsi e un ritardar grandemente il moto dell' acque, mentre all' incontro le curve e gli angoli molto ottusi o nulla o poco pregiudicano al movimento ed al Condotto: 4°. i Condotti di piombo perchè flessibili, debbon preferirsi a quelli di ferro, di legno, di pietra e di terra cotta, o almeno bisogna sempre addolcire con tubi di piombo le piu ardite piegature del Condotto totale: 5°. bisogna fabbricar sul Condotto di distanza in distanza dei piccoli recipienti, che non solo col trattener l' acqua, la costringano a deporre le materie eterogenee e a depurarsi, ma anche col deviarla per i loro sfoghi lascin vuoto il Condotto inferiore e dian luogo a

risarcirlo se occorra: 6°. affinchè nei lunghi e tortuosi Condotti l'aria mescolata con l'acqua non si accumuli e non rallenti o impedisca affatto il corso del fluido, debbonsi saldare alle parti più elevate del Condotto alcuni *sfiatatoj* o piccoli tubi d'un piede incirca d'altezza con valvule all'estremità, per cui l'aria raccolta possa uscirsene liberamente: 7°. la grossezza dei Condotti dee essere alquanto maggiore di quel che insegni la teorìa (399), attesi e gli sforzi dell'aria che mai non si sprigiona intieramente, e gli urti dell'acqua contro gli angoli del Condotto, e i difetti della materia ond'egli è fatto, e i danni che soffre dall'umidità del terreno adjacente: 8°. come l'acqua porta spesso delle parti pietrose o molto facili a petrificarsi, e queste fortemente attaccandosi alle pareti del Condotto, lo ristringono e possono anche giungere ad acciecarlo, è necessario o toglierne il tartaro di tempo in tempo se è possibile, o rinnovare quasi ogni 50 anni il Condotto: 9°. se il Condotto destinato ad un getto d'acqua abbia un diametro minor di quello che si è fissato di sopra (396), o se il giusto diametro venga ristretto dalle chiavi che ferman l'acqua, il getto non potrà sollevarsi alla sua massima altezza; per l'opposto si guadagnerà sempre qualche cosa in altezza allargando il Condotto più di quel che il calcolo lo richieda: 10°. nei getti d'acqua esattamente verticali il fluido ricadèndo su quello che sopraggiunge, ne impedisce l'intero innalzamento; perciò i getti un poco obliqui salgono più alto dei verticali: 11°. gli *spilli* in forma di cilindri e di coni danno un getto assai minore del più alto possibile; questo si ottiene per mezzo di una laminetta ben levigata, uniforme, di mediocre grossezza, forata normalmente al suo piano e saldata all'estremità del Condetto.

Moto dell' acqua nei Fiumi.

Accennammo di sopra che le cognizioni essenziali al regolamento d'un fiume, riguardano, per dir così, la sua fisica geografìa (379); quì perciò supponghiamo che si abbia sotto gli occhi una Carta o descrizione topografica del fondo dell'alveo, delle rive, degli argini, delle varie altezze dell'acqua, e della livellazione non men del fiume che dei suoi contorni. Allora le pratiche avvertenze

sull' acque correnti possou ristringersi a quanto segue:

402. I fiumi anderebbero al loro sbocco per linea retta se nulla vi si opponesse (14): ma supposto che i sassi, le ghiaje, l'arene ed altre materie eterogenee diano obliquamente un primo indirizzo al filone, egli portandosi con impeto contro una delle due rive e venendone ribattuto, anderà a percuotere inferiormente la riva opposta, e con la continuata alternativa dell' incidenze e delle riflessioni, roderà l' una e la farà concava, deporrà dall' altra e la renderà convessa, onde in fine il fiume rettilineo sarà cangiato in tortuoso. Si ricorre allora all' arte utilissima di costringerlo a lasciar le sue materie piuttosto in un luogo che in un altro, sicchè riempiendo or quà or là da se medesimo i vuoti e le corrosioni già fatte, venga a ricuperare appoco appoco la natural dirittura. Sogliono a quest' oggetto usarsi i *pignoni*, ripari a calcina in forma di cuneo, che costruiti obliquamente al filone sulle convessità della riva, spingono la corrente alla parte opposta e la invitano a riposare e quindi a sgravarsi tra pignone e pignone, finchè spariscano le concavità. È però necessario di ben conoscere il fiume e quelle fisiche circostanze di lui, che niun Meccanico può prevedere (379); poichè se una leggiera ineguaglianza arresti le materie alla punta del pignone, e vi cagioni perciò qualche vortice, sarà tacitamente scavato il fondo, e verrà danneggiata quella parte stessa della riva che volevasi conservare: bisogna dunque stabilire in tal modo i pignoni, da poterli abbattere al primo inconveniente che ne derivi. Rifletto per altro in generale, che le tortuosità d' un fiume son talvolta indifferenti, cioè non apportano nè vantaggio nè danno, e allora, prescindendo da particolari motivi, sarebbe follìa il guastar l' opera della natura con un addirizzamento dispendioso ed equivoco, specialmente finchè il fiume non cessi di correre in ghiaja, nel quale stato non vi è forza alcuna che possa tenerlo in briglia e prevenirne le deviazioni: talvolta senza recar nocumento, fanno un vero comodo o per l' irrigazione delle campagne che il fiume serpeggiando attraversa, o per la Navigazione che trova in esso la maggior profondità di cui bisogna, e allora sarebbe anche più stolto il pensiero di addirizzarlo: talvolta poi sono assolutamente dannose o per il ritardo della celerità

lerità o per la corrosione degli argini, da cui nasce il rigonfiamento dell' acqua, l' impedimento degli scoli, le rotte e la sommersione dei terreni. Questo è il caso in cui merita discussione il progetto di addirizzare il corso del fiume.

403. Infatti è quello il più certo rimedio di tutti i mali; la maggior brevità della linea aumenta la pendenza e la celerità, le piene si tengon più basse, gli scoli riescon più pronti, la corrosion delle rive è tolta quasi interamente, si acquista molto terreno, e con Canali o *Diversivi* da aprirsi e chiudersi secondo le circostanze, può conservarsi l' irrigazione, come con Pescaje o *Sostegni* si conserva la navigazione. Non è per altro sì facile l' *Addirizzamento* d' un fiume. Conviene osservare 1°. di incominciarlo sempre al di sotto dell'ultimo limite delle ghiaje (402), altrimenti la maggior celerità dell' acqua ne prolunga il trasporto (373), il fondo si rialza, gli scoli si difficultano, e le rotte e i cangiamenti di letto divengon quasi inevitabili: 2°. di addirizzare in principio quella prima tortuosità da cui le seguenti hanno origine (402), quand' anche ella fosse nel tronco ghiajoso del fiume, poichè in tal guisa tutte l'altre si mitigheranno o almeno non potranno avanzarsi, mentre si rettificano l' inferiori: 3°. di proseguire il lavoro incominciando appunto dall' inferiori e salendo dallo sbocco fino al limite delle ghiaje; l' opposto metodo aumenterebbe nel tronco superiore la celerità dell' acqua, che giunta in copia alle più basse tortuosità tuttor sussistenti, vi soffrirebbe un ritardo, si alzerebbe oltre il solito, ed inonderebbe il paese: 4°. di cessare da ulteriori addirizzamenti, subito che si vedrà che in virtù dei già fatti, il pelo del fiume nelle piene più grandi è tanto abbassato da non doversi temere alcun danno dalle tortuosità rimanenti.

404. Non sempre però si potranno togliere con addirizzamenti interrotti le tortuosità dei fiumi, ed attesa la qualità delle terre palustri e poco atte a sostenere il peso dell' arginatura diritta, converrà talvolta intraprendere una *Nuova Inalveazione*, opera difficilissima che esige delle cautele straordinarie: 1°. bisogna idear talmente il lavoro, che senza impegnarsi in una spesa esorbitante, si abbia una moral certezza d' una felice riuscita: 2°. bisogna com-

binare per quanto è possibile, il pubblico col privato interesse, e disegnar perciò il nuovo alveo in parte tanto bassa del piano, che gli scoli delle vicine campagne abbiano un pronto ingresso nel fiume: 3°. per salvare gli argini dagli urti e corrosioni dell' acqua, conviene scavarle il terreno affinchè corra ben incassata tra le sue sponde; se il terreno sia facile ad esser corroso, basta scavarne a tutta misura i primi tratti ed accennarne o sbozzarne il restante, mentre l' acqua introdottavi lo perfezionerà da se stessa; in caso opposto, non potendosi sperar soccorso da lei, è forza di scavar l' alveo nell' intere dimensioni che gli convengono, ed allora l' escavazione si incomincia sempre dallo sbocco, onde l' acqua delle *sorgive* o polle che per lo più s' incontrano scavando, abbia un pronto scolo e non impedisca la continuazion del lavoro: 4°. se le dimensioni del nuovo alveo non sieno quelle appunto che la natura darebbe al fiume, egli o non vi entrerà o non vi si stabilirà; convien perciò che l' alveo concorra presso a poco col pelo basso o del mare o del fiume a cui fa capo, e verso questo punto il letto dell' influente dee cominciare a salire; la pendenza di cui parleremo tra poco, risulta generalmente dal combinar la forza dell' acqua con la resistenza del terreno e con la qualità delle materie che il fiume trasporta, onde se corre in ghiaja vi vorrà una pendenza maggiore in parità del resto, senza di che non manterrà scavato il suo fondo; insomma nella progettata inalveazione dovrà sempre consultarsi attentamente e prendersi per modello il vecchio fiume: 5°. nemmeno gli argini sono arbitrarj, convenendo combinarne la grossezza, l' altezza e la distanza dalle rive, con la qualità della terra onde son fatti, col loro avvallamento ordinario, col rialzamento del fondo, col vario stato dell' acque or alte or mediocri, con le straordinarie escrescenze, e specialmente con le prime piene che riesciranno maggiori, finchè il fiume non abbia dilatato l' alveo e tolto ogni impedimento al suo corso: 6°. se il filone dell' acqua non entri comodamente nel nuovo letto, bisognerà moltiplicarne le bocche, poichè le molte vie faciliteranno l' ingresso; per la stessa ragione dovranno moltiplicarsi gli sbocchi nel mare, allorchè o il suo poco fondo darebbe adito al fiume di prolungarsi la linea (373), o i venti gagliardi e l' opposto moto dei flutti rispingerebbero l' acqua e ne impedi-

rebbero il pronto scarico: 7°. la strana ed incostante natura dei torrenti oltre a queste regole esige ancora che si dia la minima larghezza possibile al fondo del nuovo alveo e la massima possibile inclinazione e dilatazione alle rive ed agli argini; in tal guisa lo scavo riuscirà sempre proporzionato alle grandi e piccole piene, e l'acqua ne' suoi stati diversi avrà tanta altezza, pressione e celerità da mantener libero ed espurgato il suo fondo.

405. Ma una nuova inalveazione dee riguardarsi come un rimedio dei soli casi estremi e disperati, e finchè il miglioramento e la rettificazione del vecchio letto potranno aver luogo, non dovrà pensarsi a cangiarlo. Molto più sarà pericolosa l'impresa se l'inalveazione non abbia solamente in mira l'addirizzamento d'un fiume, ma anche la *riunione di molti fiumi* in un medesimo recipiente. La diversissima indole dei fiumi che spesso discordan tra loro non solo nella quantità dell'acqua e nella qualità delle materie che portano, ma anche nella situazion del fondo, nella natura del terreno, e nella varia combinazion delle piene, fa che i precetti in questo proposito sieno pochissimi e pieni di eccezioni: 1°. la riunione dei torrenti è per lo più d'una riuscita infelice; l'inegual distanza delle loro origini, e la diversità e successione dei temporali e delle pioggie, gli obbligano a portare al comun tronco le loro piene in tempi assai differenti, onde ciascuna incontrandosi solitaria in un alveo più largo del suo bisogno, vi deposita, lo riempie e ben presto ne deteriora il sistema: 2°. se i fiumi influenti portan tutti una materia omogenea o successivamente men grave di quella del recipiente, ed hanno almen per la maggior parte le piene contemporanee, potrà farsene la riunione, poichè tutti insieme si formeranno in breve un alveo conveniente, e le piene unite dei più correggeranno il male che avran prodotto i ringorghi e le deposizioni degli altri; in caso diverso, è manifesto che il letto comune non potrà mai avere stabilità: 3°. talvolta però la riunione fa cangiar natura ai fiumi riuniti, e se il fondo d'un influente nel punto d'incontro sia molto più alto o più basso del fondo del recipiente, l'acqua abbassandolo nel primo caso, ed innalzandolo nel secondo, acquisterà o perderà pendenza nel tronco di sopra, e potrà o spingere fino al comun letto

le ghiaje che prima abbandonava per via, o interrire il proprio alveo; allora se non siavi altro punto più adattato alla confluenza, converrà sostenere allo sbocco il fondo dell' influente più alto per mezzo d' una o più *chiuse* o pescaje, ovvero con un adeguato ristringimento di rive procurargli una maggior celerità se è più basso: 4°. quando poi le materie portate dai fiumi influenti son più gravi di quelle del principale, nè vi sarà maniera di prolungar con qualche tortuosità il corso degli influenti, onde prima di unirsi, depongano le loro ghiaje, si comincierà dal riunir l' inferiore e se ne osserveranno gli effetti, che non riuscendo dannosi, daranno luogo ad inalveare il seguente, e con la stessa cautela si intraprenderà successivamente la riunione degli altri; ma si avrà per limite oltre cui non dee procedersi, il più piccolo danno che risulti dall' ultima inalveazione, quale sarebbe un' insolita corrosione di rive, un cangiamento di corso, un' elevazion di fondo ec.: 5°. la concorrenza dei fiumi dee farsi in direzioni quasi parallele o ad angoli molto acuti, onde senza contrasto d' acque e ritardo di moto, proseguano liberamente il lor cammino: 6°. allorchè verificate le condizioni ed eseguite le regole fin quì esposte, possa sperarsi una felice riunione, non vi sarà bisogno che la larghezza del recipiente eguagli la somma delle larghezze degli influenti, affinchè l' acqua riunita non si alzi di troppo; anzi è certo che potendo la celerità delle nuove acque aumentarsi talvolta (ma non già sempre) in maggior ragione della lor quantità, vi son dei casi in cui la riunion di più fiumi fa sgonfiar quel primo in cui si gettano, tanto più che la maggior copia d' acque scava maggiormente il fondo, vi incontra una minor resistenza, mette in moto le molecule inerti più vicine alle rive, e sgombrati gli impedimenti, si facilita il corso e lo scarico.

406. E quì meritano delle particolari avvertenze i *Canali* che dalle campagne, dalle paludi, dai laghi e da altri corpi d' acqua stagnanti si conducono ai fiumi, o dai fiumi si derivano per varj fini ad altri punti inferiori. Ordinariamente per impedir le corrosioni, si munisce l' imboccatura e lo sbocco di questi canali con muro a calcina, la cui figura suol essere parallelepipeda: ora per poco che si osservino le naturali aperture che l' acqua di proprio istinto si accomoda, si vedrà che la figura ne è

molto diversa. Ben lungi dal serrarsi il passaggio con angoli prominenti e vivi, ella se lo dilata rodendo i risalti e le punte, e dando all'una e all'altra riva la forma d'una curva convessa che molto si accosta alla parabola o al largo della tromba di cui parlammo di sopra (401); in tal guisa evita in gran parte gli effetti della contrazion della vena, non produce caduta, non corre in direzione obliqua e convergente, non perde celerità, e relativamente alle dimensioni del canale, si procura il massimo scarico. Poichè dunque è regola generale d'Idraulica di secondar la natura le cui leggi sono inviolabili, non dovrà lasciarsi al capriccio di un artefice imperito il costruir l'imboccature e gli sbocchi dei canali, le porte dei sostegni, le pile dei ponti ec., ma converrà proporzionargli al modello che l'acqua libera tutto dì ci presenta.

407. Or cominciando dai *Canali di scolo*, 1°. in parità di circostanze dee prescergliersi per gli scoli il canal rettilineo; è però certo che la natura ne indica per lo più l'andamento e segna da se stessa la strada all'acqua, nè sarà buon consiglio abbandonarla: 2°. gli scoli più felici e più pronti si hanno in quei terreni che son più alti della massima altezza del fiume in piena, poichè in tal caso non vi è mai ostacolo al corso dell'acqua; perciò se questo vantaggio d'altezza possa ottenersi con prolungare il canale fino al mare vicino, ben si intende che lo scolo in mare dovrà preferirsi a qualunque punto d'un fiume: 3°. ma se convenga valersi del fiume, dovranno i terreni essere almen più alti o del fondo di esso quando sia temporaneo, o del suo pelo basso se sia perenne, affinchè cessata l'acqua o la piena si dia luogo allo scolo: 4°. intanto durante la piena o l'acqua, bisognerà con cateratte o altre simili macchine vietare al fiume l'ingresso nel canale di scolo che senza ciò sarebbe interrito, e dare al canale tanta larghezza quanta può occorrergli, perchè unitamente ai fossi secondarj contenga presso a poco tutta la pioggia che d'ordinario suol cadere, mentre la cateratta è chiusa; ciò esige un calcolo i cui elementi sono l'ordinaria durata delle piene, la quantità del terreno che scola, e la quantità della pioggia che può cadere in una volta, la quale in Toscana può stimarsi la massima quando giunge a *poll.* $3\frac{1}{2}$ d'altezza; in ogn'altro caso

si daranno al canale le dimensioni di maggior risparmio: 5°. non si uniranno insieme gli scoli dei più alti e dei più bassi terreni, poichè l' asciugamento degli uni cagionerebbe l' allagamento degli altri; e se i due diversi scoli si impedissero scambievolmente intersecandosi, converrà condur l' uno al di sopra o al di sotto dell' altro per mezzo d' un *ponte-canale*, o d' un Canale o *botte sotterranea*, secondo la varia pendenza di quello e di questo: 6°. giacchè per la poca pendenza dei fossi particolari, può averne ordinariamente assai poca il canal di scolo, onde è molto piccola la celerità delle sue acque, bisognerà rimuovere ogni minima cagion di ritardo col riparare agli smottamenti delle rive e degli argini se vi sieno, coll' espurgare il fondo dai ridossi, interrimenti e piante aquatiche, e con invigilare contro le ture ed incannicciate dei pescatori e contro i passatoj che vi gettano i Contadini per attraversar con prontezza le lor campagne: 7°. la piccola celerità degli scoli impedisce ancora di riunirne molti insieme, non solo perchè l' acqua lentamente movendosi si alzerebbe assai con pregiudizio dei fossi vicini, ma anche perchè mancando di forza per profondarsi l' alveo, vi si farebbero delle straordinarie deposizioni, e col nuovo rialzamento del pelo crescerebbe il male delle campagne: 8°. infine allorchè il terreno per la sua natural bassezza ricusa ogni scolo, dovrà risanarsi con le Colmate cioè col forzar l' acque torbide a depositarvi la loro terra e a rialzarlo.

408. Ecco le regole essenziali per le *Colmate* che il continuo rialzamento degli alvei (373) rende di giorno in giorno più necessarie nella pianura: 1°. supposta la vicinanza d' un fiume o torrente sotto il limite delle ghiaje, si livelli e si divida in più parti il terreno che vuol colmarsi se sia molto grande, e ciascuna parte si cinga d' argini proporzionati al corpo dell' acqua che debbono contenere, con aperture per cui tutti i recinti comunichino liberamente tra loro; e se la terra è scarsa nè somministra assai di materia per gli argini, si formeranno essi in principio con macchie di vetrici che fortificate da palizzate e da zolle, riterranno l' acqua alla meglio finchè giunga tanta terra in colmata da costruirgli regolarmente: 2°. si aprano due canali proporzionatamente arginati, il primo dal fiume alla colmata diviso in varj rami che

portin l'acqua ai fondi più remoti del terreno, il secondo dalla colmata ad un tronco inferiore del fiume o ad altro recipiente che riceva lo scolo dell'acque dopo che avranno depositata la torba; che se manchi il luogo a questo scolo, cessata la piena e rialzato alquanto il terreno, converrà rimetter nel fiume l'acque chiare della colmata per lo stesso primo diversivo per cui vi vennero, e allora il terreno si colmerà più lentamente: 3°. all'ingresso del canale di scolo si faccia in luogo d'argine uno steccato con palizzate e fascine, la cui altezza dovrà poi aumentarsi a misura che si alza il terreno: 4°. si munisca con chiavica e cateratta il taglio da farsi all'argine o sponda del fiume, e se il rialzamento del terreno debba esser considerabile, si ponga la soglia della chiavica nel fondo stesso del fiume, onde passino in colmata anche l'arene più grosse, a cui però si negherà l'ingresso con rialzar la soglia, dacchè le deposizioni saranno giunte ove dee cominciar la terra fertile ed il buon fondo. È chiaro che disposte in tal guisa le cose, se al venir d'una piena si apra la cateratta, l'acque torbide s'introdurranno nei rami del diversivo, e passando continuamente per l'aperture di comunicazione, si alzeranno in tutti i recinti fino alla cima dello steccato, da cui non comincieranno a traboccare che dopo essersi riposate o almeno ritardate molto tra gli argini, e avervi perciò deposta la più gran parte della materia che portano. Ma poichè questa materia si posa sul terreno tumultuariamente e lascia gran vuoti, onde poi s'abbassa e scomparisce, converrà replicar tante volte l'operazione e portar la colmata tant'alto, che ridotta una volta a cultura, sia capace d'uno scolo felice; perciò i rami di derivazione dovranno spesso scavarsi affinchè ricevano l'acqua in abbondanza, e la conducano alle parti della colmata più lontane dal fiume e più basse di fondo.

409. Vi son delle regole anche per i Canali Navigabili o *Navigli*, il cui uso è sì frequente e vantaggioso nelle vaste pianure: 1°. se il fiume da cui scende il Naviglio, corra tra gli argini, il taglio dell'argine fin sotto al pelo basso del fiume, dovrà munirsi di muro, onde non sia corroso, e piegarsi il muro nella figura altrove accennata (406); negli incastri di questo muro può applicarsi una cateratta che regoli l'introduzione dell'acqua a misura dell'occorrenze: 2°. se il fiume corre incassato, si at-

traversi il suo alveo con una pescaja che sollevi il pelo dell'acqua e la inviti a passar nel canale; e poichè l'inevitabile effetto delle pescaje è di rialzare il fondo nel tronco superiore, il che le seppellisce infine tra le deposizioni e le rende infruttuose, converrà stabilir la soglia dell'emissario molto più in alto del fondo attuale del fiume, e portar poi l'altezza della pescaja a tanti piedi di più sopra la soglia, quanti sono i piedi d'acqua che voglion derivarsi dal fiume: 3°. se il fiume corre in ghiaja, si fabbrichino lungo il canale a varie distanze e specialmente presso all'emissario, delle chiaviche o *paraporti* con cateratta, i quali abbiano la soglia più bassa del fondo del canale; questi si aprono nell'escrescenze, e l'acqua accorrendovi in copia, sempre più determina il filone verso il diversivo, espurga la soglia dell'emissario, scava il fondo tra i paraporti, e rende al tronco inferiore del fiume tutte le deposizioni che il canale avea raccolte dal superiore: 4°. si faranno nel canale a fior d'acqua degli sfogatoj che in occasione di piena riportino al fiume l'acqua superflua introdottasi nel canale: 5°. la pendenza di esso perchè le barche possano comodamente risalirlo, non dovrà eccedere i 2 piedi incirca per miglio; la sua larghezza per evitare gli interrimenti, dovrà essere la minima possibile, tale cioè che due barche di fronte non si impediscano il passo; e converrà regolarne la profondità sulla figura delle barche e sul massimo carico che posson ricevere, usando se occorra i sostegni o cateratte artificiali che trattengon l'acqua e la obbligano ad alzarsi fino al segno conveniente:

410. Ma le Colmate come anche i Canali Navigabili suppongono un *Diversivo*, cioè un Canale che parte da un fiume e lo spoglia d'una porzione delle sue acque. Ora come gli antichi Idraulici lodarono molto i Diversivi, qual rimedio sicuro contro le inondazioni imminenti; così i più tra i moderni gli hanno messi in un intero discredito come cagioni di quegli stessi trabocchi che voleansi per loro mezzo evitare. Infatti poichè si è visto di sopra (405) che il maggior numero degli influenti può talora diminuir l'altezza del fiume principale, è ben chiaro che un Diversivo potrà piuttosto aumentarla; ed è passato quasi in generale assioma che la celerità dell'acque segue prossima-

mente

mente la ragione delle lor quantità, almeno fino ad un certo limite; cosicchè l' altezze restano presso a poco le stesse o si uniscano i fiumi o si dividano. Per altro un fiume stranamente ingrossato, non potrà sempre ristringersi tra certe gole o strozzature di letto troppo sproporzionate al suo bisogno; e allora son tanti i disastri che produce il furor vittorioso della gran piena; è sì lacrimevole il vederla sormontare i ripari, sbranare gli argini, atterrar le muraglie, sommerger le case, ricuoprir di sassi e di sterile arena un tratto immenso di felici campagne, strascinare in confuso gli uomini, gli alberi, gli animali, e lasciar chi ne scampa, alle conseguenze fatali della fame, della povertà, della disperazione: che se non possa evitarsi una rotta tumultuaria e violenta, sarà molto meglio il tener tutto disposto per prevenirla con l' apertura d' un Diversivo. Tre poco dispendiose cautele bastano a questo effetto: 1°. al di sopra dei ristringimenti più pericolosi del fiume, e dove giacciono dietro agli argini o dei fondi assai bassi o delle praterìe, si allevi una sufficiente macchia di salci nani e di pruni: 2°. quì si faccia, o nell' uno o nell' altro o in ambedue gli argini, un taglio da regolarsi in proporzion dell' escrescenze altre volte osservate; e difesi dalla corrosione i lati del taglio con solido e permanente intrecciò di fascine ad angolo vivo, si chiuda esattamente il resto dell' apertura con altro intreccio amovibile pur di fascine e di terra: 3°. al primo indizio di soverchiamento o di rottura negli argini, si apra all' acque il passaggio, ed esse perdendo l' impeto nell' aspro incontro delle fascine, e scaricandosi sui sottoposti arboscelli, non avranno forza di scavare il terreno, deporranno tra i cespugli le più grosse materie, e feconderanno anzi le terre incolte sopra cui si spandono. Del resto, se i Diversivi posson talvolta riuscire inutili e fors' anche dannosi, servon per l' opposto sì bene al Commercio ed all' Agricoltura, che niun Popolo industrioso ha lasciato di profittarne o per il trasporto dei generi o per l' irrigazion dei terreni.

411. Premessi questi compendiosi precetti sul modo di evitare i danni dei fiumi e di ritrarne ogni possibil vantaggio, daremo ora le regole comunemente prescritte per averne le portate e le dimensioni. Sogliono distinguersi i

fiumi in *liberi* ed *impediti :* son liberi allorchè non incontran per via forza alcuna valutabile, che ritardi quel moto a cui l' acqua è naturalmente determinata o dalla pressione delle molecule superiori se il fiume corra orizzontale, o dalla pendenza dell' alveo se il fiume corra inclinato; e sono impediti allorchè una o più cagioni ne alterano in qualche modo il natural movimento: così l' asprezza delle rive e del fondo, la diminuzione della pendenza, le tortuosità, gli allargamenti, le pescaje, gli ammassi di pietre e d' arene ec. son cagioni ritardatrici che impediscono i fiumi, rallentandone il corso contro natura. Or poichè non vi è forse alcun fiume in cui non concorrano molte insieme di queste esterne cagioni, la distinzione riescirebbe inutile per i fiumi del nostro Globo, se le particolari circostanze non autorizzassero alle volte a riguardarli come affatto liberi o non sensibilmente impediti.

412. In primo luogo gli ostacoli permanenti ed uniformi che agiscono per tutto il fiume equabilmente, se lo privano dell' assoluta libertà, gli lasciano almeno una libertà relativa per cui corra con celerità proporzionale a quella che tolto ogni ostacolo gli converrebbe; e purchè un fiume in qualche modo sia libero, non lascierà di esser soggetto alle regole che si sogliono prescrivere per questo caso. In secondo luogo, può rendersi libero per arte qualche fiume che non lo è per natura, fingendone ristretta la sezione dentro tutti gli impedimenti delle rive e del fondo, e trascurando quell' acqua che o ristagna o lentamente scorre di là da questi limiti: la sua quantità può con sicurezza aversi per nulla, specialmente se si consideri che il contare sopra una portata d' acqua minore alquanto del giusto non cagiona per l' ordinario alcun pregudizio (405. 408), mentre all' opposto i più dannosi errori dei Pratici nascono assai spesso dall' aver rilevata dal calcolo una portata che supera di gran lunga la vera; ond' è che a scanso di tali errori, fanno uso piuttosto delle portate proporzionali e relative, che dell' assolute e reali. Infine si osserva con maraviglia che gli antichi Idraulici nel fondare una teorìa, ebbero in vista i soli fiumi liberi, che l' applicarono quasi indistintamente ai fiumi di qualunque corso, e che le loro grandiose operazioni idrometriche riuscirono il più delle volte con fortunato successo: ciò ci induce a sospettare che forse vien trascurato nella teorìa qual-

che elemento che ne compensa in molti casi il difetto, e per cui le dottrine sui fiumi liberi posson trasportarsi senza pericolo ai fiumi impediti. Comunque siasi, ecco quanto può dirsi sugli uni e sugli altri.

413. Se la sezione AC d' un fiume libero si concepisca chiusa con un piano verticale, e quindi si aprano in 47
esso infiniti piccolissimi lumi; è manifesto che l' acqua uscirà da ciascun di essi, cioè da tutta la sezione, come dal recipiente già considerato di sopra (367), e avrà luogo anche quì la parabola dell' equazione $S^2 = 4ps$ (370), ove $S = AM$, $S = BE$ ec. rappresentano la celerità dell' acqua nei punti A, B ec., $s = AD$, $s = BD$ ec. sono l' altezze di essa sopra i medesimi punti A, B ec., e $4p$ è il parametro della curva. Per determinar questo parametro, sia $S = AM = c$ la celerità dell' acqua nella sua superficie AN o lo spazio che ella trascorre nel tempo $T = 1''$ (22), e chiamisi $s = AD$ l' altezza dovuta a quella celerità o spazio S: si avrà dunque $s = \frac{c^2}{2g}$ (70) $= \frac{S^2}{2g}$; onde $S^2 = 4ps = 2gs$ e $4p = 2g = pie. 60,4$ (68).

414. Trovata pertanto col solito galleggiante (378) la celerità superficiale c dell' acqua, si avrà $\frac{c^2}{2g} = AD$ per l' altezza a lei dovuta (70); onde posta $a = AB$ l' altezza o profondità dell' acqua nel fiume, sarà l' ascissa $s = BD = a + \frac{c^2}{2g}$, $S^2 = 4p\left(\frac{2ag + c^2}{2g}\right) = 2ag + c^2$ (413), e la somma delle molecule effluenti per la linea o strato DB, verrebbe espressa dalle infinite colonne fluide o celerità (367) o ordinate (413) della parabola, cioè dalla parabola stessa DEB $= \frac{2Ss}{3}$ (L. 946. III) $= \frac{1}{3g}\sqrt{(2ag + c^2)^3}$: ma per tutta l' altezza AD non vi è acqua, e perciò manca tutta la parabola DMA $= \frac{2AM \cdot AD}{3} = \frac{2c \cdot c^2}{3 \cdot 2g} = \frac{c^3}{3g}$; dunque le molecule effluenti si riducono all' area DEB $-$ DMA $= \frac{1}{3g}\left[\sqrt{(2ag + c^2)^3} - c^3\right]$. Moltiplicando pertanto questo strato d' acqua per la larghezza $AN = l$ d' una sezione viva e rettangolare AC, la por-

41 tata Q d' acqua che si ha da lei in $1''$, sarà finalmente $Q = \frac{l}{3g} [\sqrt{(2ag + c^2)^3} - c^3] = \frac{sl}{453} [\sqrt{(\frac{302a}{5} + c^2)^3} - c^3]$.

415. Tanto basterebbe per la misura dell' acque correnti se le loro sezioni fossero rettangolari; e con questa regola infatti si calcola l' *oncia* o *pollice d' acqua* che è un emissario rettangolare $AC = la$, le cui dimensioni $BC = l$, $BA = a$, come pure il *battente* $AD = b = \frac{c^2}{2g}$ (414), cioè l' altezza b a cui dee l' acqua costantemente alzarsi sopra il rettangolo AC, son fissate dalle particolari Leggi di ciascun Paese. Ma poichè rare volte s' incontrano nei fiumi delle sezioni rettangolari, e sembra poco esatto il metodo di alcuni Idrometri che le misurano al solito (375), e tutte poi le riducono ad un rettangolo, la cui larghezza è la larghezza stessa del fiume (L. 517); l' uso ha stabilito che si iscriva in esse il massimo possibil rettangolo, e si divida il rimanente spazio in triangoli con un lato qualunque parallelo alla superficie o livello AN. Sia BHG uno di questi triangoli, la cui base $HG = b$, la distanza dalla totale altezza dell' acqua o $ZD = i$, la normale sulla base o $BZ = n$, un' ascissa $BL = x$, la sua differenziale $LK = dx$, e condotte LO, KF parallele a ZG o AN, si avrà $ZB\ (n) : BL\ (x) :: HB : BX :: HG\ (b) : XO = \frac{bx}{n}$. Ora poichè $S^2 = 4ps$ (413), se si prenda l' ascissa $s = DL = i + n - x$, la lunghezza della colonna fluida, ovvero (366. 367) la celerità dell' acqua in L, sarà $S = 2p^{\frac{1}{2}} \sqrt{(i + n - x)}$: ma la quantità dell' acqua effluente risulta dal prodotto della base o area della colonna fluida per la sua lunghezza o celerità (366); dunque l' infinitesima quantità dq d' acqua che in $1''$ si scarica per l' area XOFV ($= \frac{bxdx}{n}$, perchè attesa la sua piccolezza, può riguardarsi come rettangolare) sarà $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}xdx}{n} \sqrt{(i + n - x)}$, ove fatto $i + n - x = z$,

verrà (L. 858) $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \times z^{\frac{1}{2}} dz\,(z - i - n)$; ed integrando, $q = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(i+n)z^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + Cost. =$ $\frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2(i+n-x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(i+n)(i+n-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + Cost.$: ma fatto $x = 0$, svanisce anche q; dunque $Cost. =$ $\frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2(i+n)^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{2(i+n)^{\frac{5}{2}}}{5} \right) = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \cdot \frac{4(i+n)^{\frac{5}{2}}}{15}$, e però posto $x = n$ e $p = \frac{g}{2} = 15,1$ (413), tutta l' acqua che passerà per il triangolo BHG sarà $q = \frac{259b}{250n} [2\sqrt{(i+n)^5} - (5n + 2i)\sqrt{i^3}]$. 47

416. Quando il triangolo abbia il vertice all' insù come IHG, si farà $QI = i$, $IP = x$, e ritenute tutte l'altre denominazioni di sopra, si avrà col raziocinio medesimo, $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}} x dx}{n} \sqrt{(i+x)}$, e posto $i + x = z$, verrà $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \times z^{\frac{1}{2}} dz\,(z - i)$; ed integrando, $q =$ $\frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2iz^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2(i+x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2i(i+x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + Cost.$: e $Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2i^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{2i^{\frac{5}{2}}}{5} \right) =$ $\frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{15n} \times 4i^{\frac{5}{2}}$: onde infine fatto $x = n$, e $p = 15,1$, avremo $q = \frac{259b}{250n} [2\sqrt{i^5} + (3n - 2i)\sqrt{(i+n)^3}]$. È inutile di avvertire che se si avesse un triangolo come IGB, basterebbe condur GH parallela ad AN, ed il calcolo

47 dei due triangoli IGH, BGH darebbe quello dell' intero triangolo IGB: osserveremo piuttosto che in tutte le formule fin quì trovate, le quantità a, b, c, i, l, n debbono esprimersi in piedi, come in piedi si espresse g (413).

417. Così le proprietà della parabola offrirono agli Idrometri la soluzione del fondamental problema sulla portata dei fiumi liberi. L' altro problema egualmente importante sulla giusta pendenza da assegnarsi ai loro letti, onde sieno stabili, ed il concorso di nuovi influenti non gli incavi o gli rialzi, fu sciolto in parte per teorìa, ed in parte per osservazione, e si decise che *se nel punto della confluenza tanto gli influenti, quanto il recipiente abbiano materie prossimamente omogenee, ed il letto non sia troppo resistente o cretoso, le pendenze debbono essere in ragione inversa delle portate:* di modo che se sia q la portata del recipiente prima della confluenza, Q la portata del recipiente e dell' influente insieme, e DE la pen-

41 denza del recipiente in un miglio, quella di ambedue nel tratto stesso d' un miglio, sarà $KC = \frac{q \cdot DE}{Q}$.

418. Contro questa formula potrebbe dirsi che se sia $q = Q$, si avrà sempre $KC = DE$, cioè se un fiume conservi inalterabile il suo corpo d' acqua, esigerà dovunque una costante pendenza, il che ripugna alle osservazioni (373). Ma son ben rari quei fiumi che non ricevano alcun influente, come quì si suppone, e quando pur ve ne fossero, è da avvertire che la portata q in un tronco superiore del fiume, è un misto molto eterogeneo d' acqua, di sassi, di ghiaje, d' arene e di terra, mentre la portata Q nel tronco inferiore sempre più si avvicina alla pura acqua, deponendo i fiumi per via le più grosse materie, e riducendosi infine a strascinar poca terra con sottilissima arena. Non esprimendo dunque Q, q le portate assolute dei due tronchi, ma le quantità relative dell' acqua, le quali facilmente si ottengono prendendo una stessa misura delle due acque, e calcolando la vera quantità d' acqua che ciascuna contiene, si troverà sempre $Q > q$ e però $KC < DE$. Ed ecco perchè nella costruzion della formula abbiam supposte omogenee le materie del recipiente e degli influenti, oltre il precetto già dato altrove (405) di non riunir mai quei fiumi le cui materie son più gravi di quelle del recipiente.

419. Sull' altezza e larghezza dovute all' alveo d' un fiume, non hanno gli Idrometri pronunziato per anche con precisione, benchè sia questo un problema non meno interessante degli altri due. Si sa di certo che i fiumi sotto le medesime dimensioni son capaci di portate estremamente diverse (405), e tanto basta perchè dalle portate non si possano inferir le dimensioni: si sa del pari che le varie sezioni d' un medesimo fiume, attesa principalmente la differente natura dei terreni che attraversa, ora son più profonde e men larghe, ed ora più larghe e men profonde, il che rovescia qualunque legge costante di larghezza o profondità, e qualunque analogìa volesse stabilirsi tra questa e quella. Nondimeno osservandosi che in terreni suscettibili di corrosione, il fiume si forma da se medesimo un canale nelle vere misure che gli convengono (404), è passato per principio che gli alvei sufficientemente profondati debbon tenersi piuttosto ristretti, e che si dee cautamente abbondare nella distanza degli argini dalle rive, onde l' acqua in caso di escrescenze e possa allargarsi liberamente, e non graviti troppo contro gli stessi argini, e deponendo le torbe tra gli argini e le rive resti sempre meglio incassata. Del rimanente i molti esempj di lavori felicemente eseguiti, saranno la miglior regola di tutti quelli che si vorranno eseguire, e un prudente Idrometra non si accingerà ad un' opera senza esempio, se la palese volontà di chi può avervi un immediato interesse, non gli offra fortunatamente il comodo d' una pericolosa esperienza.

420. Applicazioni. I. In un fondo assai regolare d' un fiume in piena, la cui celerità superficiale era di 3 miglia l' ora, fu presa la sezione GLKMF non alterata da svolte, non soggetta a ringorghi, non vicina a rotte, in 42
breve, libera e viva (374), che si trovò risolubile in un massimo rettangolo NM, in due triangoli GNL, FBM con la base alla superficie, e in un terzo triangolo LKM sottoposto al rettangolo: era NB = LM = *pie.* 30, GN = *pie.* 10, FB = *pie.* 18, AK = *pie.* 15,7, AP = NL = BM = *pie.* 12, onde PK = 3,7. Qual' è la portata di questo fiume?

Presa (414) la formula $Q = \frac{5l}{453} [\sqrt{(\frac{302a}{5} + c^2)^3} - c^3]$, osservo che trattandosi ivi della portata in 1″,

dee cercarsi la celerità c per 1″, onde poichè 3 miglia sono *pie.* 15000, un'ora è 3600″ e 3600″ : 15000 :: 1″ : 4,17, avremo $c = 4,17$, $a = 12$, $l = 30$, $\frac{302a}{5} + c^2 = 742,19$ $\sqrt{(\frac{302a}{5} + c^2)^3} = 20219,6$, da cui sottraendo $c^3 = 72,51$, verrà $Q = \frac{150 \cdot 20147,09}{453} = 6671,22$ piedi cubici d'acqua, somministrati dal rettangolo NM.

42 Quanto ai due triangoli **GLN**, **FMB** che hanno la stessa altezza, gli riunisco in un solo, e presa (415) la conveniente formula $q = \frac{259b}{250n}[2\sqrt{(i+n)^5} - (5n+2i)\sqrt{i^3}]$, avverto che i non comprende la sola distanza dalla base al livello, che quì sarebbe zero, giacchè i triangoli hanno la base alla superficie dell' acqua, ma anche l' altezza $\frac{c^2}{2g} = \frac{17,39}{60,4} = 0,29$, dovuta alla celerità superficiale (414); onde si avrà $b = GN + FB = 28$, $n = LN = MB = 12$, $i = 0,29$, $i + n = 12,29$; $2\sqrt{(i+n)^5} = 1059,03$ da cui sottraendo $(5n + 2i)\sqrt{i^3} = 9,46$, verrà $q = \frac{259 \cdot 28 \cdot 1049,57}{250 \cdot 12} = 2537,16$ piedi cubici somministrati dai triangoli **GLN**, **FMB**.

Calcolando finalmente con la stessa formula il triangolo **LKM**, sarà $b = LM = 30$, $n = KP = 3,7$, $i = PA + 0.29 = 12,29$, $i + n = 16$, $2\sqrt{(i+n)^5} = 2048$, da cui sottraendo $(5n + 2i)\sqrt{i^3} = 1852$ in circa, verrà $q = \frac{259 \cdot 30 \cdot 196}{250 \cdot 3 \cdot 7} = 16,6$ piedi cubici d' acqua somministrati dal triangolo **LKM**. Dunque la portata totale del fiume è di 10854 piedi cubici d' acqua in 1″.

421. II. Supponghiamo ora che in questo fiume voglia aprirsi di fianco un Diversivo con un emissario rettangolare AC la cui larghezza AN = *pie.* 12, e l' altezza BA
47 = 15,7. Qual sarà la portata d' un tal Canale?

Avremo dunque (414) $l = 12$, $a = 15,7$, $c = 4,17$; $\frac{302a}{5} +$

$\frac{3024}{5} + c^2 = 965,67$; $\sqrt{(\frac{3024}{5} + c^2)^3} = 30008,4$ da cui sottraendo $c^3 = 72,51$, verrà $Q = \frac{60 \cdot 29935,89}{453} = 3965$, e tale sarebbe la portata teorica se lo sbocco fosse libero: ma poichè la bocca è di fianco e almeno in questo caso convien valutare la contrazion della vena che gli Idrometri ordinariamente trascurano, bisognerà supporre x la portata effettiva e far l'analogìa (366) $x : 3965 :: 5 : 8$ che dà $x = 2478$ piedi cubici d'acqua somministrati dall'emissario in 1″.

422. III. Vogliasi infine aprire un alveo ove debban concorrere a varj intervalli tre fiumi omogenei, le cui portate in piedi cubici sono 10854, 4300, 7259. Supposto che l'attual pendenza del primo sia di *pie.* 1,5 per miglio, quali saranno la larghezza, la profondità e la pendenza del nuovo alveo?

È chiaro che se il primo fiume corra felicemente nella pendenza e dimensioni attuali, non vi sarà luogo a cangiamento per tutto il tratto del nuovo alveo fino all'incontro del secondo influente, se pur non avvenga che il primo lasci presto i sassi e le ghiaje, nel qual caso fin dal punto estremo della deposizione, potrebbe cominciarsi a diminuirne la pendenza (418). Ma posto che ella resti costante in questo tronco, al concorso del secondo influente sarà $q = 10854$, $DE = 1,5$, $Q = 15154$, onde (417) 41

$KC = \frac{10854 \cdot 1,5}{15154} = 1,07$, e al concorso del terzo influente sarà $q = 15154$, $DE = 1,07$, $Q = 22413$, onde $KC = \frac{15154 \cdot 1,07}{22413} = 0,73$.

Le dimensioni dei tronchi inferiori in largo e profondo potranno esser quelle del primo e più grande influente e anche minori, se il terreno non abbia molta tenacità; in caso contrario, si aumenterà la larghezza di qualche piede a misura che entrano nel nuovo alveo i particolari influenti, e si eleveranno gli argini in giusta distanza dalle sponde per le ragioni già dette altrove (419).

423. Passiamo ai fiumi impediti. L'esperienza è l'u-

nico mezzo per conoscerne la portata, cioè bisogna determinarne con una particolare osservazione la media celerità (376). Al Quadrante idrometrico il cui uso espone a gravissimi sbagli (378), e a molte altre macchine di equivoco risultato, sostituirono alcuni un grosso cilindro di legno leggiero di una lunghezza un poco minore dell'attual profondità del fiume, e fermati ad una sua estremità tanti piccoli pesi, quanti bastassero a mantenerlo verticale e a fior d'acqua, fissarono nell'altra una piccola verga che indicasse gli occulti moti della parte sommersa, e lo esposero alla corrente in un tratto assai regolare e diritto, trasportandolo ora nel filone ed ora in vicinanza delle due sponde, e notando gli spazj da esso trascorsi in un dato tempo, dai quali poi col solito metodo (378) conclusero la media celerità di tutto il fiume. Infatti se il cilindro movendosi conservi la situazion verticale, o solamente faccia a luogo a luogo qualche leggiera oscillazione, è manifesto che la sua celerità sarà la risultante di tutte le varie celerità con cui si muovono i filetti aquei dalla superficie fin verso il fondo, e perciò questa celerità potrà sicuramente prendersi per la media.

424. In oggi son tornati gli Idrometri all'uso quasi dimenticato di due globi, l'un dei quali galleggiando sull'acqua, ne sostiene un secondo più grave che con tenue filo di variabil lunghezza si unisce a lui. Chiamati r', r'' i raggi del galleggiante e del sommerso, c' la celerità semplice del primo o dello strato aqueo per cui cammina, celerità superficiale che deve esplorarsi al solito (378); c'' la celerità semplice del secondo o dello strato aqueo per cui si muove, celerità interiore che quì si cerca; e c la celerità composta dei globi riuniti, celerità che si rileva dalla loro corsa nel fiume: se si faccia $r' + r'' = r$, si avrà $cr = c'r' + c''r''$, equazione similissima alla nota equazione delle mescolanze (L. 390. XXII). Non ci allungheremo a dimostrarla per via diretta, giacchè parve a taluno che la portata d'un fiume dedotta da lei, riuscisse in fine maggior della vera, ond'è che ai globi si sostituiron cilindri e parallelogrammi di sufficiente lunghezza, uniti non più con un filo, ma con verghe inflessibili: piuttosto daremo quì brevemente la descrizione d'un'altra semplicissima macchinetta. Formato col piccol tubo *on*
48 di metallo o di vetro, e col concavo emisfero Q di legno

 FIG. 48

il corpo *oQn* di una gravità specifica eguale a quella dell'acqua, ed introdottolo nel cordoncino RS di 40 o 50 tese strettamente annodato alle funicelle GRE, FSH alquanto più lunghe della doppia larghezza del fiume, si scelga un tratto regolare AD di 50 o 60 tese, e nel fondo di esso in vicinanza delle rive, si fissino i quattro stabili AE, BG, CH, DF, a due dei quali BG, DF si fermino fortemente e quasi a fior d'acqua i capi delle funicelle GE, FH, avvolgendone il rimanente agli altri due AE, CH in modo che le funicelle non molto tese, lascino la macchina in libertà. Ciò fatto 1°. si abbandoni il lungo e sottil filo *pq* a cui è attaccato il corpo *oQn*, e si noti lo spazio che in 5″ o 6″ vien trascorso da *oQn*: 2°. ricondotto *oQn* in R per mezzo del filo *pq*, si sommergano nell' acqua alla profondità d' un piede le funicelle GRE, FSH e si ripeta la misura dello spazio che trascorre *oQn* nel tempo stesso di 5″ o 6″: 3°. si abbassino nuovamente d' un altro piede le funicelle GRE, FSH, e così si prosegua di piede in piede fino al fondo del fiume, notando i varj spazj che in tempo sempre eguale si trascorrono da *oQn*: 4°. svolgansi di qualche tesa le funicelle GRE, FSH dai due stabili AE, CH e si avvolgano ai due BG, DF, onde il cordoncino RS, ed il corpo *oQn* passi ad una seconda stazione, quindi ad una terza, ad una quarta ec. secondo la maggiore o minor larghezza del fiume, e in ciascuna stazione si ripetano a varie profondità le misure degli spazj in egual tempo trascorsi da *oQn*, e si rilevi infine da tutti insieme la media celerità (378). Ben si vede che essendo *oQn* della specifica gravità dell'acqua, ed assai libero, attesa la sottigliezza e pieghevolezza del suo cordoncino, concepirà subito la celerità di quello strato in cui s' immerge, e rappresenterà col suo moto il moto indiscernibile dei filetti fluidi nelle loro diverse profondità. Del resto, il corpo *oQn* potrà farsi ampio ad arbitrio se vogliansi diminuir l' osservazioni, e sarà sempre facile di immaginare un meccanismo per avvolgere, svolgere, abbassare e rialzar prontamente a piede a piede le funicelle GRE, FSH. Dico *a piede a piede*, perchè tanto basta per l' ordinario: ma in casi di gran premura ove l' estrema esattezza può decidere della felicità d' un lavoro, potranno farsi le immersioni di mezzo in mezzo piede,

potranno moltiplicarsi le stazioni, e si avrà un risultato tanto più giusto, quanto sarà più grande il numero delle esperienze.

425. Determinata pertanto o con l'uno o con l'altro o per maggior sicurezza, con più d'uno di tali strumenti la media celerità dell'acqua, si avrà subito la portata del fiume (379). In questo solo elemento i fiumi liberi differiscono dagli impediti: le dottrine sulla pendenza, sull'altezza e sulla larghezza dell'alveo (417.419) son comuni ad ambedue.

Applicazione. Vogliasi la portata d'un fiume la cui
42 sezione GLKMF ha la figura e le dimensioni di sopra (420) cioè NB = LM = *pie.* 30, GN = 10, FB = 18, NL = 12, PK = 3,7, e da 11 immersioni nella stazione N si sono avuti in 6″ *pie.* 50, 57, 62, 70, 69, 69, 51, 49, 48, 40, 38; da 14 immersioni nella stazione A in egual tempo, *pie.* 59, 60, 64, 72, 72, 77, 78, 81, 80, 80, 78, 58, 51, 39; e da 11 immersioni nella stazione B in tempo parimente eguale, *pie.* 54, 58, 58, 63, 68, 74, 72, 65, 60, 51, 47.

Sommati i numeri delle tre stazioni e divise le somme per 11, 14, 11 (378), si ha $\frac{603}{11} = 54,8$; $\frac{994}{14} = 67,8$; $\frac{670}{11} = 60,9$; sommati nuovamente questi tre numeri e divisa la somma per 3, viene $\frac{183,5}{3} = 61$ incirca; e poichè 6″ : 61 : : 1″ : 10, 17, la celerità media del fiume sarà di *pie.* 10, 17 in 1″. Ora il rettangolo NM = BN . NL = 360 (L. 514), il triangolo $GNL = \frac{GN.NL}{2} = 60$ (L. 515), il triangolo $FBM = \frac{FB.BM}{2} = 108$, e il triangolo $LKM = \frac{LM.PK}{2} = 55$ incirca; dunque la sezione GLKMF = *pie. qua.* 583, e perciò la portata Q = 583.10, 17, = 5929 piedi cubici d'acqua somministrati dal fiume in 1″.

Macchine Idrauliche.

426. Non possiamo quì trattenerci nell'esposizione di quelle macchine che gli antichi e i moderni Idraulici hanno

inventate o per giuoco o per lusso: benchè stimabili ed ingegnose, non hanno un fine tanto importante da trovar luogo in questi Elementi. Noi intendiamo per Macchine Idrauliche tutte quelle ove l'acqua appplicata come una forza meccanica, mette in un movimento uniforme degli argani, delle ruote dentate e in generale delle leve.

427. Queste macchine hanno d'ordinario una gran ruota che ricevendo l'urto dalla corrente, trasmette il moto alle varie parti dell'edifizio. Nella circonferenza ADG 49
di questa ruota si fissano stabilmente delle *ali* o tavole AB, DE, GF ec. che per lo più sono normali al piano della ruota e rettangolari: l'acqua correndo, incontra successivamente quest'ali, e costringe la ruota ad aggirarsi con una certa forza, che dipende insieme dalla posizion dell'ali, dal loro numero, dalla lor grandezza e dalla proporzione delle celerità della ruota e dell'acqua.

428. Quanto alla posizion dell'ali, non si penerà molto a convincersi che delle due piccole aree O*o*, M*m*, l'inclinata M*m* benchè presenti all'acqua una maggior superficie e sia in maggior distanza CM dal punto C d'appoggio, riceve però un urto assai più debole di quell'urto diretto che riceve la normale O*o*; onde quanto più spesso le ali della ruota torneranno alla situazione AB, tanto ne sarà più grande la forza. E di quì può concludersi che il maggior numeno d'ali è il più vantaggioso, specialmente se il moto della ruota non sia molto veloce; nè però conviene di moltiplicar l'ali in modo che non resti ai filetti fluidi un certo intervallo per cui agiscano liberamente: la sola esperienza può fissare questo numero, e si è imparato da lei che ad una ruota ordinaria di 4 o 5 piedi di diametro convengono 20 o 24 ali, e che questo numero può anche diminuirsi quando la loro immersione nell'acqua è considerabile. Anche la molta larghezza di queste ali, trattandosi d'una ruota immersa in un fiume, contribuisce alla forza, poichè quanto più si allarga la data superficie dell'ala, tanto è più grande l'impulsione: ma se la ruota sia mossa da una quantità d'acqua determinata e ristretta in canali, giacchè quanto più cresce la larghezza dell'ala e perciò del canale, tanto più diminuisce l'altezza della data acqua e perciò anche il suo impulso, converrà contentarsi d'una mediocre larghezza d'ali. Infine è chiaro che la celerità della ruota potrà

stimarsi ben proporzionata con quella della corrente, quando la quantità di movimento uniforme che ella produce nella resistenza qualunque che se le oppone, sarà la più grande che possa aversi. Sia pertanto r la massa o resistenza da vincersi, c la celerità uniforme di essa, e g la sua distanza dal punto d' appoggio; sia χ la celerità media dell' acqua, x la cercata celerità uniforme della ruota, $AB = a$ l' ala o piano che riceve dall' acqua un ur-
49 to diretto f, e $CO = h$ la distanza del centro C della ruota del centro O di quest' urto; dunque $\chi - x$ è la celerità residua del fluido (380), ed rc è la quantità di moto della resistenza, che perciò dovrà essere un massimo. Se si supponga che un piano qualunque b esposto normalmente all' acqua, riceva da essa l' urto o forza φ, si avrà (382) $f : \varphi :: a(\chi - x)^2 : b\chi^2$ ed $f = \frac{a\varphi(\chi - x)^2}{b\chi^2}$: ma dall' equilibrio che in ciascun istante si produce e si distrugge tra la resistenza e la forza, abbiamo (235) $rg = fh = \frac{ah\varphi(\chi - x)^2}{b\chi^2}$, e dal moto uniforme di ambedue viene $c : x :: g : h$ (266), onde $g = \frac{ch}{x}$; dunque $rc = \frac{a\varphi x(\chi - x)^2}{b\chi^2}$ che dee essere un massimo. Si differenzj pertanto quest' espressione, e si avrà $\frac{d(rc)}{dx} = \frac{a\varphi\chi^2 - 4a\varphi\chi x + 3a\varphi x^2}{b\chi^2} = 0$, cioè $x^2 - \frac{4\chi x}{3} = \frac{-\chi^2}{3}$, e perciò $x = \frac{2\chi \pm \chi}{3}$. Il segno + dà $x = \chi$ o la celerità della ruota eguale a quella dell' acqua, valore che non serve, mentre allora cesserebbe ogn' urto; ma il segno — dà $x = \frac{\chi}{3}$, massimo cercato, da cui si vede che per avere il più grande effetto della ruota, bisogna che la sua celerità sia $\frac{1}{3}$ di quella dell' acqua; e l' esperienza infatti poco scostandosi dalla teorìa, fa giungere la celerità della ruota a $\frac{2\chi}{5}$. Sostituito il valor di x e fatto $b = a$, si trova la quantità di moto $rc = \frac{a\varphi x(\chi - x)^2}{b\chi^2} = \frac{4\varphi\chi}{27}$, e poichè chiamando d l' al-

tezza dovuta alla celerità χ dell' acqua, si ha la forza della pressione o urto diretto $\varphi = ad\gamma$ (369), sarà finalmente il valore assoluto del cercato massimo $rc = \frac{4ad \cdot \chi\gamma}{27}$, cioè la ruota produce il suo massimo effetto, quando è capace d' imprimere la celerità χ della corrente al prisma d' acqua $\frac{4ad}{27}$.

429. Del resto vi son degli Idraulici che per determinar le più importanti dimensioni d' una macchina mossa dall' acqua d' un condotto, dopo aver data a questo la forma d' un arco concavo IDEL per cui mezzo l' acqua giunge all' ala in E con impulso più vigoroso, prendono l' al- 49
tezza $HK = c$ della conserva per comune scala delle misure, e fanno l' elevazione del canale o $LK = \frac{c}{2}$, il raggio $CA = c$, l' ala $AB = \frac{c}{4}$, e la distanza $CL = 2c$: che se le circostanze del luogo obblighino a collocar la macchina in gran distanza dalla conserva, prescrivono allora di inclinare il canale IE di $\frac{1}{10}$ della sua lunghezza, affinchè la pendenza renda all' acqua la celerità distrutta dall' attrito, e la macchina agisca come se fosse in vicinanza della conserva. Questo metodo è fondato sulla proporzione che tutte le dipendenze della macchina debbono aver con la forza dell' acqua, onde se ne ottenga il maggiore effetto possibile: merita perciò di esser preferito alle regole pratiche dei volgari Artefici, le quali assai di rado hanno per fondamento il raziocinio e l' esperienza.

430. Finiremo con alcuni Problemi Idromeccanici per esercizio degli Studiosi.

I. Esprimere in piedi cubici le libbre francesi di un dato volume $v = \frac{p}{\gamma}$; all' incontro, esprimere in libbre francesi i piedi cubici di un dato volume $v = a^2 b\gamma$; e dato il peso p ed il volume v d' un corpo, esprimerne all' ordinaria maniera la specifica gravità γ. *Ris.* 1°. $v =$ *pie. cub.* $\frac{p}{70\gamma}$: 2°. $v =$ *lib.* $70a^2b\gamma$: 3°. $\gamma = \frac{p}{70v}$.

II. Dato il peso $P = lib.$ 200 e la gravità specifica $\Gamma = 1,121$ d'un uomo, trovare il peso x di un tal pezzo di sughero di una gravità specifica $\gamma' = 0,24$ che la gravità specifica dell' uomo e del sughero uniti insieme sia a quella dell' acqua di fiume o a $\gamma = 1,009$ nella ragione di $m = 9$ ad $n = 10$. *Ris.* $x = \frac{P\gamma'(\Gamma n - \gamma m)}{\Gamma(\gamma m - \gamma' n)} = lib.$ 14 incirca.

III. Dato il peso $P = lib.$ 2 e la gravità specifica $\Gamma = 18,261$ d'un pezzo d'oro, trovare il volume x, il raggio y e la grossezza uniforme $y - z$ di un globo vuoto in cui dovrà conformarsi l' oro, affinchè la gravità specifica del globo sia a quella dell' acqua piovana o a $\gamma = 1$, nella ragione di $m = 1$ ad $n = 2$. *Ris.* 1°. $x = \frac{Pn}{\gamma m} =$ *pie. cub.* 0,057143: 2°. $y = \sqrt[3]{\frac{3Pn}{4\pi\gamma m}} =$ *pie.* 0,2389: 3°. $z = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi}\left(\frac{n}{\gamma m} - \frac{1}{\Gamma}\right)} =$ *pie.* 0,2367.

IV. Dati due vasi, l' uno sferico, l' altro cilindrico e circoscrittibile allo sferico, trovare il valore e la ragione delle pressioni che soffre la loro superficie totale dal fluido che li riempie. *Ris.* 1°. il valore di ciascuna pressione è triplo del peso del fluido: 2°. le due pressioni son tra loro come 3 a 2.

V. Determinar la pressione che soffre un triangolo rettangolo d' una base b e d' un' altezza l, quando con la base orizzontalmente situata è immerso in un fluido ad una distanza c dal piano di livello, e forma con l' orizzonte un angolo i d' inclinazione. *Ris.* Se il triangolo ha il vertice in basso, si troverà la pressione $s = \frac{\gamma bl \, sen \, i}{2}\left(c + \frac{l}{3}\right)$; se lo ha in alto, sarà $s = \frac{\gamma bl \, sen \, i}{2}\left(c + \frac{2l}{3}\right)$.

VI. Data la lunghezza $b =$ *pie.* 200 di un argine rettangolare, l' altezza $a =$ *pie.* $3\frac{1}{2}$ a cui vi giunge l' acqua, e l' angolo $i = 42°$ della scarpa, trovar le pressioni s', s'' orizzontale e verticale, che egli soffre dall' acqua. *Ris.* $s' = \frac{a^2 b\gamma}{2} =$ *lib.* 85750, $s'' = \frac{a^2 b\gamma \cot i}{2} =$ *lib.* 95235.

VII. Sopra due pilastri orizzontali si vogliono stabilire in angolo due travi parallelepipede delle lunghezze g, g' per sollevar dall' acqua una gran cateratta rettangolare, verticalmente sommersa alla profondità $c =$ *pie.* $\frac{1}{2}$ sotto il piano di livello: la larghezza di essa è $b =$ *pie.* 40, la sua altezza è $l =$ *pie.* 18, il suo peso è $p =$ *lib.* 2000, e il suo attrito contro gli incastri è $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ della pressione. Cerco 1°. il peso o forza totale f a cui dovranno resister le travi per sostener la cateratta mentre s' innalza: 2°. le forze φ, φ' che obbligano le travi stesse a mantenersi nella loro situazione, supposti a, a' gli angoli che esse fanno coi pilastri: 3°. i pesi π, π' di cui ciascuna è caricata: 4°. quali diverranno φ, φ' e π, π' quando le travi sieno eguali: 5°. quale delle due soffrirà lo sforzo maggiore: 6°. quale deve essere la loro grossezza, sapendosi che poste G^2, G'^2 le basi di due travi prismatiche dello stesso legno, A, A' le loro altezze, P, P' i pesi che posson sostenere, si ha $P : P' :: \frac{G^4}{A^2} : \frac{G'^4}{A'^2}$. *Ris.* 1°. $f = \frac{2pn + b\gamma l(2c + l)}{2n} =$ *lib.* 161600, forza che anderà scemando a misura che la cateratta si alza sopra l' acqua: 2°. $\varphi = \varphi' = \frac{f \cos a \cos a'}{\operatorname{sen}(a + a')}$, qualunque sia la diversa lunghezza delle travi: 3°. $\pi = \frac{f \operatorname{sen} a \cos a'}{\operatorname{sen}(a + a')}$, $\pi' = \frac{f \operatorname{sen} a' \cos a}{\operatorname{sen}(a + a')}$: 4°. $\varphi = \varphi' = \frac{f \cot a}{2}$, e $\pi = \pi' = \frac{f}{2}$: 5°. se gli

angoli delle travi coi pilastri sieno diseguali, quella delle due opposta al minor angolo farà uno sforzo maggiore; ma se gli angoli sieno eguali, faranno l' una e l' altra uno sforzo eguale $\frac{f}{2\,sen\,a}$: 6°. chiamate x^2, z^2 le basi delle travi, si avrà $x^2 = \frac{G^2g}{A}\sqrt{\frac{f\cos a'}{P\,sen\,(a+a')}}$, $z^2 = \frac{G^2g'}{A} \times \sqrt{\frac{f\cos a}{P\,sen\,(a+a')}}$.

VIII. Costruire di fianco ad un fiume una cateratta rettangolare che potendosi liberamente muovere intorno a due peruj, stia chiusa da se medesima nello stato permanente del fiume, e da se stessa si apra nei soli tempi o di piena per colmare un terreno, o d' aridità per irrigarlo. *Ris.* L' altezza della cateratta si farà eguale a quella dell' acqua nel suo stato permanente e i due peruj si fisseranno in basso ai $\frac{2}{3}$ di quest' altezza: nei tempi di piena la cateratta con la sua parte maggiore si aprirà in fuori a seconda dell' urto dell' acqua, e con la minore verrà in dentro; nei tempi d' aridità per l' opposto verrà in dentro con la maggiore, e si aprirà in fuori con la minore.

IX. Si è affondata in un fiume una barca che col suo carico forma un volume $v =$ *pie. cub.* 150 ed un peso $p =$ *lib.* 15000: si cerca la forza f necessaria a sollevarla alla superficie. *Ris.* $f =$ *lib.* 5874.

X. Per mezzo di certi vecchi cannoni di ferro fuso vorrebbe affondarsi in un porto di mare una quantità d' abeti da costruzione, il cui volume è $v =$ *pie. cub.* 700: si cerca il peso Π che dovrà unirsi al legname per tenerlo sommerso. *Ris.* $\Pi =$ *lib.* 27501,8.

XI. Si è costruito un Globo aerostatico il cui diametro è di *pie.* 36, e gli si vorrebbe unire un peso di *lib. franc.* 1504; si cerca a quale altezza x si solleverà quando nella pianura la gravità specifica dell' aria è $\Gamma = 0,001$. *Ris.* $x =$ *pie.* 3266,5.

XII. Supponendo tutto come nel problema passato e aumentando solamente il peso fino a *lib. franc.* 2000, a quale altezza si solleverà il Globo? *Ris.* È impossibile che il Globo s' innalzi.

XIII. L' acqua stagnante forma col suo livello un piano indeterminato X in un recipiente, la cui base b ha un piccol lume m: si cerca il tempo t in cui quest' acqua, aperto il foro, scenderà dall' attuale altezza a all' altezza $a - x$ da assegnarsi ad arbitrio. *Ris.* $t = \frac{4}{5m} \times \sqrt{\frac{2}{g}} \int \frac{X dx}{\sqrt{(a - x)}} + Cost.$

XIV. Determinare il tempo t in cui l' acqua uscendo per un piccol lume m aperto nella base b d' un vaso o prismatico o piramidale d' un' altezza p, scende dall' altezza a all' altezza $a - x$ da assegnarsi ad arbitrio, per esempio all' altezza o. *Ris.* 1°. $t = \frac{8b}{5m} \sqrt{\frac{2}{g}} [\sqrt{a} - \sqrt{(a - x)}]$: e per l' altezza o, $t = \frac{8b}{5m} \sqrt{\frac{2a}{g}}$: 2°. $t = \frac{8a^2 b}{5p^2 m} \sqrt{\frac{2}{g}} [\frac{8}{15} \sqrt{a} + (\frac{2(a - x)}{3a} - \frac{(a - x)^2}{5a^2} - 1) \sqrt{(a - x)}]$, e per l' altezza o, $t = \frac{64 a^2 b}{75 p^2 m} \sqrt{\frac{2a}{g}}$.

XV. Con un vaso cilindrico nella cui base di *pie.* $\frac{1}{4}$ di diametro è un piccol lume circolare di un raggio z, costruire un orologio ad acqua diviso in ore 6, dato che l' acqua cominci a scendere da un' altezza di *pie.* $1\frac{1}{2}$. *Ris.* 1°. $z =$ *lin.* 0,09 incirca: 2°. la prima divisione che segnerà la prima ora in alto avrà una lunghezza di *poll.* $5\frac{1}{2}$, la seconda di *poll.* $4\frac{1}{2}$ ec. in progressione aritmetica.

XVI. Da un fonte perenne scorre uniformemente nel tempo θ la quantità q d' acqua, che col suo livello forma un piano indeterminato X in un recipiente, la cui base b

ha un piccol lume m: si cerca in tempo t in cui l'acqua che è già ad un'altezza a, giungerà all'altezza x da assegnarsi ad arbitrio. *Ris.* $t = \int \frac{X dx}{\frac{q}{\theta} - \frac{5m}{4}\sqrt{\frac{gx}{2}}} + Cost.$

XVII. Determinare il tempo t in cui una quantità q d'acqua entrando uniformemente per un tempo θ, ed uscendo da un piccol lume m aperto nella base b d'un vaso prismatico, giunge dall'altezza a ove era in principio, all'altezza x da assegnarsi ad arbitrio, per esempio alla massima. *Ris.* $t = \frac{8b}{5m}\sqrt{\frac{2}{g}}\,[\sqrt{a} - \sqrt{x} + \frac{4q}{5\theta m}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(L[m^2\sqrt{ax} + \frac{8qm}{5\theta\sqrt{2g}}(\frac{4q}{5\theta m}\sqrt{\frac{2}{g}} - \sqrt{x} - \sqrt{a})])]$: nel caso dell'altezza massima, $x = \frac{32q^2}{25gm^2\theta^2}$, si ha $t = \infty$.

XVIII. Sopra un piano orizzontale senza attrito si muove con una celerità $C =$ *poll.* 30 in 1″ un globo d'avorio, il cui diametro è $a =$ *poll.* 1 e la cui gravità specifica sta a quella dell'aria, come $\Gamma = 1,825$ a $\gamma = 0,001$: si cerca in quanto tempo il globo trascorrerà $s =$ *poll.* 500 supposta la resistenza del mezzo. *Ris.* Si troverà $t = 17'', 33'''$.

XIX. Fu lanciato verticalmente all'insù con una celerità $p = 60$ in 1″ il globo già descritto di sopra (393): si cerca se per determinar la vera altezza σ a cui si sollevò, possa trascurarsi la resistenza del mezzo. *Ris.* Trascurando la resistenza dell'aria, si avrà $\sigma = \frac{p^2}{2g} = 59,6$: ma calcolandola per mezzo della formula $hdt = \frac{-k^2 dc}{k^2 + c^2}$ (392), si troverà $\sigma = \frac{k^2}{2h}\, l\,(1 + \frac{p^2}{k^2}) = 22,56$ intendendo per l il logaritmo iperbolico.

XX. Supposto che lo stesso globo spinto verticalmente all'insù giunga fino all'altezza $\sigma = 22,56$, determinar la celerità p con cui fu lanciato, calcolando la resistenza

del mezzo. *Ris.* $p = k\sqrt{(e^{\frac{2hc}{k^2}} - 1)} = 60$.

XXI. Da uno spillo d' un raggio $r' =$ *poll.* $\frac{1}{2}$ si vorrebbe un getto verticale d' un'altezza $a =$ *pie.* 40: si cerca l' altezza x della conserva e il raggio z del condotto. *Ris.* 1°. $x =$ *poll.* 700: 2°. $z =$ *lin.* 39,53.

XXII. Posto che un condotto di un raggio $r =$ *poll.* 4 l' attrito diminuisca la portata dell' acqua di $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$, trovare il raggio x di un altro condotto d' egual lunghezza, la cui portata, sotto una stessa altezza d' acqua, sia a quella del primo, come 1 a $p = 4$. *Ris.* $x = \frac{r + \sqrt{(4np(n-1)+1)}}{2n} =$ *poll.* 7,44.

XXIII. Dato che l' *oncia d' acqua* abbia una larghezza $l' =$ *poll.* 3, un' altezza $a' =$ *poll.* 4, ed un battente $b' =$ *poll.* 2, determinare i pollici x che si avranno da un emissario rettangolare, la cui larghezza $l =$ *poll.* 420, e l' altezza $a =$ *poll.* 30 senza battente. *Ris.* $x = \frac{la\sqrt{a}}{l'[(a'+b')\sqrt{(a'+b')} - b'\sqrt{b'}]} =$ *poll.* 1938 in circa.

XXIV. Supposto tutto come nel passato Problema, cioè $l' = 3$, $a' = 4$, $b' = 2$, $a = 30$, e valutata inoltre la celerità superficiale $c =$ *pie.* $3\frac{11}{12}$ dell' acqua in 1'', assegnare il battente b a cui questa celerità corrisponde, e i pollici d' acqua x che si avranno dall' emissario. *Ris.* 1°. $b =$ *poll.* 3,047: 2°. $x = \frac{l[(a+b)\sqrt{(a+b)} - b\sqrt{b}]}{l'[(a'+b')\sqrt{(a'+b')} - b'\sqrt{b'}]} =$ *poll.* 2176 incirca.

XXV. Ad una data distanza $b =$ *poll.* 4 dal piano di livello d' un canale o d' un fiume, aprire un tale emissario rettangolare di una data area $r =$ *poll. quad.* 42, che in un tempo dato $t =$ *or.* 1 si abbia da esso la massima

possibile quantità x d' acqua . *Ris.* $x = \frac{5l}{6} \sqrt{\frac{gr}{2}} [\sqrt{(b + \sqrt{r})^3} - b \sqrt{b}] =$ *poll. cub.* 6784978,08.

47 XXVI. Data l' altezza BD $= f =$ *poll.* 36 dell'acqua d' un canale o d' un fiume, e data la larghezza BC $= l =$ *poll.* 12 d' un emissario rettangolare da aprirvisi in fondo, determinare il battente AD $= x$ tale che per l' emissario AC sgorghi in 1″ una data quantità d' acqua q $=$ *poll. cub.* 6200. *Ris.* $x = \sqrt[3]{(\frac{6q}{5l} \sqrt{\frac{2}{g}} - f \sqrt{f})^2} =$ *poll.* 30,7.

XXVII. Sopra un fiume rettangolare e libero che aveva una sezione $la =$ *pie. quad.* $60a$, ed una data celerità superficiale o un battente b, si è gettato un ponte che ne ha variata la sezione ed il battente, riducendo la ad $l'a' =$ *pie. quad.* $42a'$ e b a b': supposto che l' altezze vecchia e nuova a, a' sieno sensibilmente proporzionali ai battenti vecchio e nuovo b, b', si cerca la ragione delle profondità dell' acqua all' insù del ponte prima e dopo l' esistenza di esso. *Ris.* Si troverà $a : a' :: \sqrt[3]{l'^2} : \sqrt[3]{l^2} ::$ 12,08 : 15,33.

XXVIII. Da un fiume rettangolare e libero, ma d' insensibil celerità superficiale, vorrebbe derivarsi con un canale parimente rettangolare e libero, una quantità d' acqua $q =$ *pie. cub.* 360 in 1″ per servizio di certe macchine idrauliche e di varie irrigazioni: si cerca la sezione $l'a'$ del canale, supposta $la =$ *pie. quad.* 80×6 quella del fiume, e quanta profondità $a - a'$ resterà al fiume dopo lo stabilimento del diversivo. *Ris.* 1°. $l' = \frac{24lq}{5(2al\sqrt{2ag} - 3q)}$ $=$ *pie.* 8,04: 2°. $a' = \sqrt[3]{\frac{(2al\sqrt{2ag} - 3q)^2}{8gl^2}} =$ *pie.* 5,76: 3°. $a - a' =$ *pie.* 0,24.

Fine dell' Idromeccanica.

TAVOLE

DEI RAPPORTI DELLE MISURE PIÙ CONOSCIUTE

E

DELLE DENSITÀ O GRAVITÀ SPECIFICHE DI DIVERSE MATERIE.

MISURE LINEARI

Usuali o minime

	Linee
Braccio a panno di Firenze	258, 719
Cubito degli Ebrei	238, 4
Metro	443, 296
Palmo Romano	99, 033
di Napoli	116, 15
Piede reale della China	141, 9
Piede Alessandrino	158, 9
Arabo	117, 72
Greco d' Auzout	135, 80
di Le-Roi	136, 56
degl' Antichi Romani	130, 9
di Vespasiano	133, 105
Piede di Bologna	168, 60
Francese	144, 0
Inglese	135, 115
del Reno di Leyda e di Danimarca	139, 183
di Padova	189, 9
di Svezia	131, 75
di Turino	227, 7
di Venezia	154, 0
di Vienna	140, 117
Varo di Castiglia	371, 0

Itinerarie

	Tese
Lega marina di Francia	2854, 974
Lì della China	295,
Miglio romano di Plinio	757, 5
di Strabone	766, 0
d' Austria	3892, 414
di Boemia	3542, 153
di Castiglia	2141, 231
d' Italia	951, 658
d' Inghilterra	827, 530
Miglio di Napoli	1141, 999
moderno di Roma	764, 0
di Svezia	5438, 04
di Toscana	848, 42
d' Ungheria	4392, 270
Stadio Egiziano	114, 13
degl' Antichi Romani	94, 693
Werst di Russia	547

P E S I

	Libbre	Once	Grossi	Grani
Alicante	0	14	4	69
Amsterdam	0	15	6	22
Amburgo	0	15	3	60
Anversa	0	14	7	57
Argentina	0	15	3	14
Avignone	0	13	1	18
Bajona	0	15	6	22
Basilea	1	0	0	64
Bergamo libbra piccola	0	9	6	69
libbra grossa	1	7	5	28
Bergen	1	0	4	44
Berna	0	14	1	57
Besanzon	0	15	6	22
Bologna	0	10	3	47
Bourdeaux	0	15	6	22
Brabante	0	14	7	57
Brescia	0	9	4	9
Breslavia	0	12	5	3
Bruxelles	0	15	0	21
Cadice	0	14	7	11
Cina	1	3	4	10
Coningsberga	0	12	5	3
Copenaghen	0	14	5	36
Crema libbra piccola	0	8	5	64
libbra grossa	1	4	2	5
Danzica	0	13	7	21
Dublino	1	0	2	16
Egitto	0	1	1	54
Firenze	0	11	1	36
Genova bilancia grossa	0	10	7	51
bilancia leggiera	0	10	2	40
Ginevra	1	1	6	24
Grecia antica	0	10	4	16
Leiden	0	14	7	11
Liegi	0	15	0	1
Linguadoca Superiore	0	13	3	3
detta di Tavola	0	13	4	0
Lione per le Merci	0	13	4	64
per le Sete	0	14	5	43
Lisbona	0	14	6	43
Livorno	0	10	7	8
Londra Trois-Veight	0	12	1	37
Averdupois-Weight	0	14	6	48
Lovanio	0	15	0	21
Lubecca	0	15	0	21
Lucca	0	11	1	19
Madrid	0	13	6	57
Malines	0	15	0	21
San Malò	0	15	6	22
Marsiglia	0	12	6	20
Messina, peso leggiero	0	10	2	1

	Libbre	Once	Grossi	Grani
Milano	0	9	3	13
Montpellier	0	13	1	19
Namur	0	15	1	33
Nantes	0	15	6	22
Nancy	0	14	7	11
Napoli	0	10	3	60
Norimberga	1	0	5	18
Parigi	1	0	0	0
Pisa	0	11	1	36
Provenza, peso di Tavola	0	13	4	0
Revel	0	13	7	21
Riga	0	12	7	69
Roano	1	0	3	41
Rocella	0	15	6	22
Roma, Mensurale	0	10	4	16
Ponderale	0	8	6	18
Moderna	0	11	1	0
Rossiglione peso di Tavola	0	13	4	0
Saragosa	0	9	7	50
S. Sebastian	0	15	6	22
Siviglia	0	14	7	11
Smirne	0	13	6	57
Stetin	0	14	2	59
Stockolm	1	3	3	68
Surat, peso Reale	1	0	0	0
peso Ordinario	0	12	0	0
Tolosa	0	13	3	3
Torino	0	10	3	45
Venezia, peso sottile	0	8	7	26
peso grosso	0	14	2	13
Verona, peso sottile	0	9	6	35
Vicenza, peso sottile	0	9	9	12
peso grosso	0	14	4	33

MISURE E PESI DI TOSCANA

e loro rapporti al Sistema Metrico

Misure e Pesi	*Suddivisioni*	*Rapporto*
Stajo	2. Mine	Litri (*Decim. cubi*) 24,362862
Mezzetta	2. Quartucci	Decilitri 7,6133943 75
Barile) da Vino	20. Fiaschi	Litri (*Decim. cubi*) 45,584041
Fiasco) da Vino	4. Mezzette	Litri (*Decim. cubi*) 2,27920205
Barile) da Olio	16. Fiaschi	Litri (*Decim. cubi*) 33,428908
Fiasco) da Olio	4. Mezzette	Litri (*Decim. cubi*) 2,08930675
Braccio cubo	6. Bracciola	Metri cubi (*Steri*) 0,198794284
Soldo cubo	27. Quattrini cubi	Centimetri cubi 24,8492855
Catasta	24. Braccia cube	Steri 4,77106282
Libbra	12. Once	Chiliogrammi 0,339542
Oncia	8. Dramme	Grammi 28,29516

T A V O L A

DELLE DENSITA' O GRAVITA' SPECIFICHE DI DIVERSE MATERIE

Si noti che in questa Tavola si prende per unità il peso d' una certa misura d' acqua piovana; onde giacchè un piede cubico di essa pesa libbre 70 francesi, se si moltiplichi per 70 il numero corrispondente a ciascuna delle seguenti materie, si avrà subito in lib. *francesi il peso assoluto d' un piede cubico di quella materia: così un piede cubico d' aria pesa* 0, 001 × 70 = lib. fr. 0, 07 *ec.*

Abeto	0, 55
Acciajo	7, 738
temperato	7, 85
Aceto secco	0, 755
Aceto ordinario	1, 017
stillato	1, 03
Acqua bollente	0, 963
di fiume	1, 009
forte	1, 3
doppia	1, 341
marina	1, 03
piovana	1, 000
di pozzo	0, 999
regale	1, 234
stillata	0, 993
Agata color d' unghia	2, 627
onice	2, 637
d' Inghilterra	2, 512
nera	1, 238
bianca	2, 59
Alabastro	1, 872
Allume	1, 714
Ambra	1, 04
Ametisto	2, 211
Amianto	2, 913
Antimonio d' Auvergne	4, 858
di Germania	4, 000
d' Ungheria	4, 7
Arancio	0, 705
Arena di fiume	1, 9
Argento fine	11, 091
di moneta	10, 535
Argilla	1, 929
Aria	0, 001
Arsenico bianco	3, 695
Asfalto nero	1, 104
Avorio	1, 825
Balsamo di Tolù	0, 896
Batrachite	2, 826
Belzoar occidentale	1, 5
Belzoar orientale	1, 53
Biacca	3, 156
Birra	1, 019
Bismut	9. 7
Bolo d' Armenia	2, 727
Borace	1, 714
Bosso	1, 03
Calamita comune	5, 004
di Cerfo	5, 245
d' Ungheria	5, 106
Calcedonio puro e finissimo	2, 615
Calcina	2, 37
Canfora	0, 996
Carbon di terra	1, 24
Cedro di Palestina	0, 613
Cera gialla	0, 995
China - china	0, 784
Cinabro d' Almade	6, 888
d' antimonio	6, 044
artificiale	8, 2
naturale	7, 3
Cipresso	0, 591
Colla di pesce	1, 111
Corallo bianco	2, 5
rosso	2, 689
Corallina	2, 613
Corno di bove	1, 84
di cervo	1, 875
Cremor di tartaro	1, 9
Crisolito del Brasile	3, 873
Cristallo	3, 15
d' Islanda	2, 72
di rocca	2, 65
del Brasile	2, 653
color di rosa	2, 67
giallo	2, 654
Croco dei metalli	4, 5
Decozione d' Arum	1, 036
di bistorta	7, 073
di china - china	1, 024

Decozione di genziana	1, 085
Diamante	3, 4
aranciato	3, 55
color di rosa	3, 531
Dodecaedro del Brasile	3, 444
verde	3, 524
giallo	3, 523
Diaspro	2, 61
malachite	2, 683
Ebano	1, 177
Elisir con sal volatile	0, 939
Ens di Marte sublimato	1, 453
tre volte	2, 269
Faggio	0, 854
Farina con crusca	0, 495
senza crusca	0, 454
Feld-spato bianco	2, 64
Ferro	7, 645
battuto	8, 286
fuso	7, 114
Frassino secco	0, 8
Gesso	1, 228
Giacinto	2, 631
Giallamina	3, 108
Ginepro	0, 556
Gomma adragante	1, 333
arabica	1, 375
gotta	1, 175
lacca	1, 154
Granato di Boemia	4, 36
di Svezia	3, 978
Granato di Siria	4, 000
Grano	0, 757
Incenso	1, 071
Iride	2, 13
Lapislazzulo	3, 054
Latte d'asina	1, 021
di capra	1, 03
di vacca	1, 03
Lavagna turchina	3, 5
Laudano liquido di Sydenam	1, 024
Lauro	0, 549
Legno d'aloe	1, 177
del Brasile	2, 03
di Gayac	1, 337
di S. Lucia	0, 773
nefritico	1, 2
Lentisco	0, 849
Litargirio d'argento	6, 044
d'oro	6, 000
Magnesia	3, 53
Malachite	3, 49
Mahogany	1, 063
Marmo	2, 718
bianco d'Italia	2, 707
nero d'Italia	2, 704
Marna di Marly	2, 428
Matrone	2, 000
Mercurio vergine	14, 000
dolce	13, 282
sublim. tre volte	9, 804
quattro volte	8, 17
Mica nera cristallizzata	2, 934
in lame trasparenti	2, 792
Miele	1. 45
Miniera d'antimonio di Poitu	4, 215
di ferro de' Pirenei	4, 171
di granato-marchesita	3, 1
Mirra	1, 25
Molibdena	4, 738
Nitro	1, 9
ridotto in sal fisso	2, 723
Nocciuolo	0, 6
Noce di cocos	1, 34
di Galles	1, 034
moscada	1, 083
Occhio di gatto grigio	2, 567
nerastro	3, 259
Olio di aneto	0, 994
d'arancia	0, 888
d'atanafia	0, 946
di campeggio	0, 931
di cannella	1, 035
di carabe	0, 978
di cera	0, 831
di comino	0, 975
di garofano	1, 034
di ginepro	0, 911
d'isopo	0, 986
di lino	0, 932
altro	0, 936
di menta	0, 975
di noce	0, 934
moscada	0, 948
d'origano	0, 940
di ramerino	0, 934
di rapa	0, 919
altro	0, 853
di ruta	0, 975
di sabina	0, 983
di sassafras	1, 094
di spigo	0, 936
di tartaro	1, 55
di terebintina	0, 871
di vetriolo	1, 7
d'uliva	0, 913
Olmo	0, 6
Ontano	0, 53

Opalo	2, 882
Oppio	1, 363
Orina	1, 03
Oro fine	10, 64
d' un ducato d' Olanda	18, 261
d' una ghinea di Gugl. III.	18, 888
d' un Luigi	18, 166
Orpimento	3, 521
Orzo	0, 658
Osso di bove	1, 656
secco di montone	2, 222
Osteocolla	2, 24
Ottone	8, 000
Pece	1, 15
Pepe	0, 996
Pero	0, 661
Petroselce	2, 653
Platina purificata	21, 042
nativa in grani	15, 607
Pietra d' arruotare	3, 288
belemnite	2, 675
di Bologna	4, 496
calaminaria	5, 000
divina o nefritica	2, 894
ematite	4, 36
di Minorca	2, 806
da fucile	2, 641
giudaica	2, 5
nera d' Irlanda	2, 165
da pavimenti	2, 74
turchina di Namur	5, 000
umana	1, 7
altra	1, 664
Pino	0, 43
Piombo	11, 325
Pioppo	0, 383
Pirite vetriolica	3, 512
Polvere da fuoco	0, 914
Porcellana della China	2, 363
Quarzo cristallizzato	2, 654
fragile opaco	2, 64
Quercia secca	0, 857
Radice di genziana	0, 8
Rame del Giappone	9, 000
di Svezia	8, 784
Ramerino	0, 728
Ranno di sale alcali	1, 06
Regolo marziale	7, 5
di cobalto	7, 811
di Nickler	7, 807
di Zinco	7, 291
di Manganese	6, 85
Resina di Gayac	1, 224
Rubino orientale	4, 483
del Brasile	3, 13
Salcio	0, 585
Sale ammoniaco	1, 453
di corno di cervo	1, 496
di Gayac	2, 148
di Glauber	2, 246
gemma	2, 143
marino	2, 125
depurato	1, 918
policresto	2, 148
Prunello	2, 148
Sandalo bianco	1, 041
citrino	0, 809
Sangue umano	1, 04
suo sedimento	1, 126
suo siero	1, 03
Sardonico	2, 18
Sassafras	0, 482
Scaglia d' ostrica	2, 092
Scamonèa	1, 2
Selce	2, 542
d' Egitto	2, 578
Selenite	2, 322
Siero di vacca	1, 016
Similoro della China fuso	8, 431
di Stolberg fuso	8, 000
Smeraldo	2, 777
bastardo	3, 052
Smeriglio di Nasso	3, 067
di Normandìa	3, 038
Spato adamantino della China	3, 873
calcare	2, 715
esaedro	2, 718
in stallattiti	2, 73
ramificato	2, 675
fluore bianco	3, 156
Ottaedro	3, 183
in stallattiti	3, 169
pesante ottaedro	4, 471
in stallattiti	4, 298
Spirito d' ambra	1, 03
di miele	0, 895
di nitro belzoardico	2, 414
comune	1, 315
di Geoffroy	1, 338
rettificato	1, 61
d' orina	1, 12
di sale	1, 13
con olio di vetriolo	1, 151
di tartaro	1, 073
di terebintina	0, 874
di vetriolo	1, 203
di vino etereo	0, 732
rettificato	0, 806

Stagno d'Inghilterra . .	7, 471
puro	7, 32
Sublimato corrosivo . .	6, 325
Sughero	0, 24
Susino secco	0, 66
Talco della Giammaica .	3, 000
di Venezia . . .	2, 78
Tartaro	1, 816
vetriolico	2, 298
emetico	2, 246
Tasso	0, 76
Terra fertile di giardino .	1, 63
di Lenno	2, 000
da pipe di Rouen .	2, 088
saponacea	2, 094
Tintura d'acciajo . .	0, 853
d'antimonio . .	0, 866
di china - china . .	0, 9
di gomma ammoniaca	0, 899
Topazio	2, 712
bastardo	4, 27
Orientale	4, 01
Tufo	1, 41
Turbit minerale . . .	8, 235
Turchina	3, 088
Turmalina di Spagna . .	3, 086
del Ceylan . .	3, 054
Tuzia	4, 615
Vena	0, 472
Verde di Corsica . .	3, 105
Verderame	1, 714
Vetrice	0, 543
Vetriolo bianco . . .	1, 9
di Danzica . . .	1, 715
d'Inghilterra . .	1, 88
Vetro d'antimonio . .	5, 28
di bottiglia . .	2, 666
comune . . .	2, 62
Vino di Borgogna . .	0, 992
delle Canarie . .	1, 033
di Sciampagna . .	0, 998
di Madera . . .	1, 038
di Malaga . . .	1, 022
d'Orleans . . .	0, 996
di Pakaret . . .	0, 999
di Pontac . . .	0, 993
di Tokay . . .	1, 054
di Xeres . . .	0, 994
Ulivo	0, 927
Uovo	1, 09
Zaffiro d'oriente . .	3, 562
Zinco	7, 107
Zolfo dell'Arcipelago .	2, 018
della Guadalupa .	2, 077
minerale . . .	1, 8
rosso di Quito . .	2, 908
vivo	2, 000
Zucchero di Saturno .	2, 745

L O G A R I T M I

Per servire alla pronta riduzione reciproca di alcune delle Misure moderne più comuni ,
con dieci decimali .

1. Per convertire i *Gradi comuni* C″ del Quadrante (sessagesimali) in *Francesi* F″ (decimali), ridotti gli uni e gli altri in minuti secondi ; e viceversa

$$log\ F'' = log\ C'' + 0{,}4894549898$$
$$log\ C'' = log\ F'' + 9{,}5105450102 \ *$$

2. *Lire Toscane* £ in *Franchi* F ; ec.

$$log\ F = log\ £ + 9{,}9242792861 \ *$$
$$log\ £ = log\ F + 0{,}0757207139$$

3. *Braccia Fiorentine* B in *Piedi Francesi* P ; ec.

$$log\ P = log\ B + 0{,}2544654122$$
$$log\ B = log\ P + 9{,}7455345878 \ *$$

4. *Braccia* suddette B in *Metri Francesi* M; ec.
$log\ M = log\ B + 9,7661340917$ *
$log\ B = log\ M + 0,2338659083$

5. *Piedi Inglesi* I in *Piedi Francesi* P; ec.
$log\ P = log\ I + 9,9873533886$ *
$log\ I = log\ P + 0,0126466114$

6. *Piedi Inglesi* I in *Braccia Fiorentine* B; ec.
$log\ B = log\ I + 9,7581811992$ *
$log\ I = log\ B + 0,2418188008$

7. *Piedi Inglesi* I in *Metri Francesi* M; ec.
$log\ M = log\ I + 9,5243152910$ *
$log\ I = log\ M + 0,4756847090$

8. *Piedi Francesi* P in *Metri* M; ec.
$log\ M = log\ P + 9,5116686796$ *
$log\ P = log\ M + 0,4883313204$

9. *Metri* M in *Tese* T; ec.
$log\ T = log\ M + 9,7101800701$ *
$log\ M = log\ T + 0,2898199299$

10. *Miglia Toscane* M′ in *Metri* M; ec.
$log\ M = log\ M' + 3,2184317628$
$log\ M' = log\ M + 6,7815682372$ *

11. *Miglia* suddette M in *Braccia Fiorentine* B; ec.
$log\ B = log\ M' + 3,4522976710$
$log\ M' = log\ B + 6,5477023290$ *

12. *Staja Toscane* S in *Litri Francesi* L; ec.
$log\ L = log\ S + 1,3867283052$
$log\ S = log\ L + 8,6132716948$ *

13. *Barili* Fiorentini *da Vino* V in *Litri* L; ec.
$log\ L = log\ V + 1,6588128224$
$log\ V = log\ L + 8,3411871776$ *

14. *Barili* da *Olio* O in *Litri* L; ec.
$log\ L = log\ O + 1,5241221900$
$log\ O = log\ L + 8,4758778100$ *

15. *Libbre Toscane* ℔ in *Chilogrammi* C; ec.
$log\ C = log\ ℔ + 9,5308935024$ *
$log\ ℔ = log\ C + 0,4691064976$

16. *Libbre Toscane* ℔ in *Libbre Francesi* φ; ec.
$log\ ℔ = log\ \varphi + 0,1249387367$
$log\ \varphi = log\ ℔ + 9,8750612633$

17. *Braccia cube* β in *Metri cubi* μ; ec.
$log\ \mu = log\ \beta + 9,2984022751$ *
$log\ \beta = log\ \mu + 0,7015977249$

Avvertimenti. 1°. Nei logaritmi segnati * la caratteristica è un *complemento aritmetico;* ed in generale in ogni reciproca riduzione l'uno dei logaritmi è sempre necessariamente il complemento dell'altro.

2°. Le cifre B, P, £, L, ℔ ec., annesse al segno logaritmico, indicano il numero delle Braccia, Piedi, Lire, Litri, Libbre ec. che si hanno da convertire, o che si sono ottenute. Per esempio cerchisi a quante Braccia Fiorentine corrispondano Piedi 284 $\frac{3}{4}$ di Francia. Avremo (N°. 3)

$log\ P\ (= log\ 284,75) = 2,4544637328$
$+ log$ costante . . . . $= \underline{9,7455345878}$ *
$= log\ B$ . . . . $= 2,1999983206 =$ . . . . $log\ 158,4887$; onde $B = 158,4887 =$ brᵃ. 158, soldi 9, linee 9,29

3°. Volendo i logaritmi di altre combinazioni oltre queste, basterà scegliere un *termine di comparazione;* e la somma dei logaritmi corrispondenti darà il logaritmo cercato:

Cerchisi per esempio di esprimere in *Barili da Vino* V i *Barili da Olio* O; Prendo il *Litro* per termine di comparazione; e perchè (N°. 13)

$log\ V = log\ L + 8,3411871776$, e inoltre (N°. 14)
$log\ L = log\ O + 1,5241221900$; sostituendo nella formula superiore il valore di $log\ L$, si ha

$log\ V = log\ O + 9,8653093676$ * e quindi
$log\ O = log\ V + 0,1346906324$

Fine del Tomo I.

